

# UNIDAD 7.- Funciones polinómicas (tema 7 del libro)

## 1. FUNCIONES POLINÓMICAS DE PRIMER GRADO

Son funciones de la forma  $f(x) = mx + n$  ó  $y = mx + n$  donde:

$m$  : se llama *pendiente* de la recta

$n$  : se llama *ordenada en el origen*. La recta pasa por el punto  $(0, n)$

Ya sabemos que su representación gráfica es una recta

Para representarlas gráficamente es suficiente con una tabla de valores.

En la siguiente tabla se representan los diferentes tipos:

<u>Tipo</u>	<u>Ejemplo</u>	<u>Gráfica</u>
<p><u>Constantes</u></p> <p><math>f(x) = k</math></p> <p>Su gráfica es una recta horizontal</p> <p>La pendiente <math>m = 0</math></p>	<p><math>y = -1</math></p> <p><math>\text{Dom}(y) = \mathbb{R}</math></p> <p><math>\text{Im}(y) = \{-1\}</math></p>	
<p><u>Lineales</u></p> <p><math>f(x) = mx</math></p> <p>Su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas <math>O(0,0)</math></p> <p>La ordenada en el origen <math>n = 0</math></p>	<p><math>f(x) = 2x</math></p> <p><math>\text{Dom}(f) = \mathbb{R}</math></p> <p><math>\text{Im}(f) = \mathbb{R}</math></p>	
<p><u>Afines</u></p> <p><math>f(x) = mx + n</math></p> <p>Su gráfica es una recta inclinada</p> <p>La pendiente y la ordenada en el origen no son nulas <math>m \neq 0</math> y <math>n \neq 0</math></p>	<p><math>f(x) = -2x + 3</math></p> <p><math>\text{Dom}(f) = \mathbb{R}</math></p> <p><math>\text{Im}(f) = \mathbb{R}</math></p> <p>La recta pasa por el punto <math>(0,3)</math></p>	

Propiedad importante: Si una recta pasa por los puntos  $A(a, b)$  y  $B(c, d)$ , la pendiente de dicha recta es:

$$m = \frac{d - b}{c - a}$$

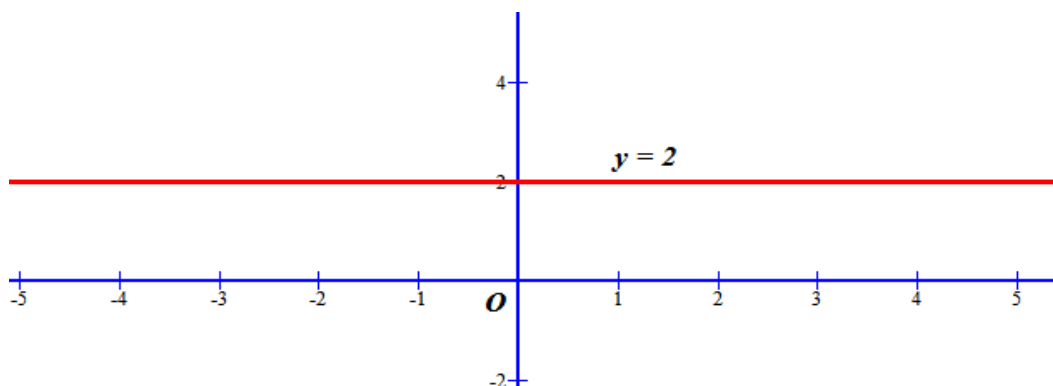
Ejemplo. Representa gráficamente las rectas:

a)

$$f(x) = 2$$

Es una recta horizontal  
Tabla de valores

x	0	1	-1
y	2	2	2

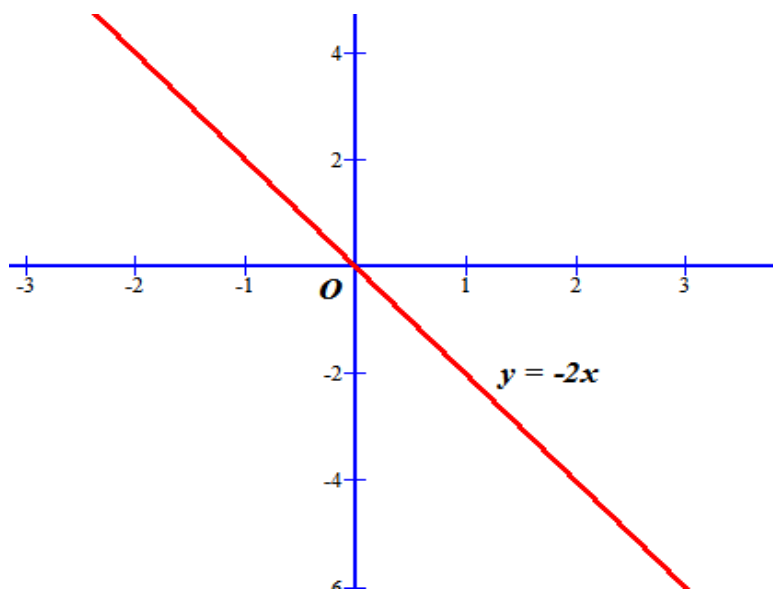


b)

$$f(x) = -2x$$

Tabla de valores

x	0	1	-1
y	0	-2	2

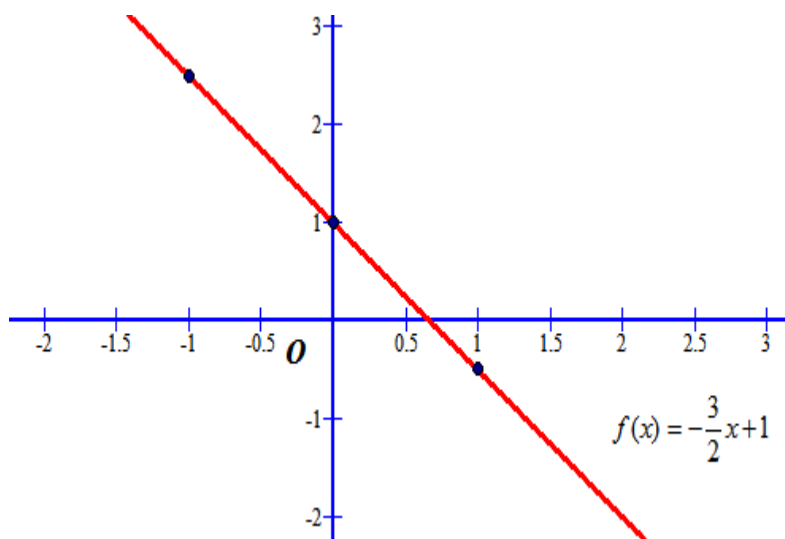


c)

$$f(x) = -\frac{3}{2}x + 1$$

Tabla de valores

x	0	1	-1
y	1	-1/2	5/2

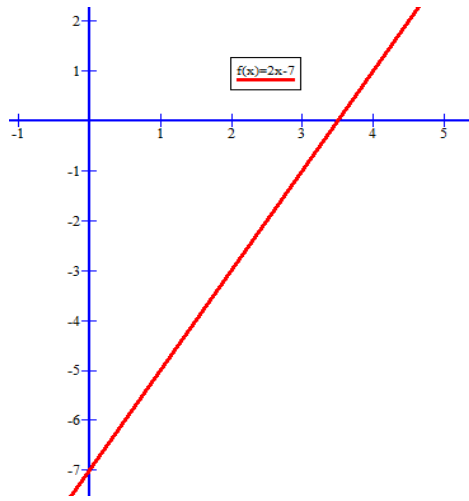


Ejemplo: Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto  $(2, -3)$  y tiene por pendiente 2 y representarla gráficamente.

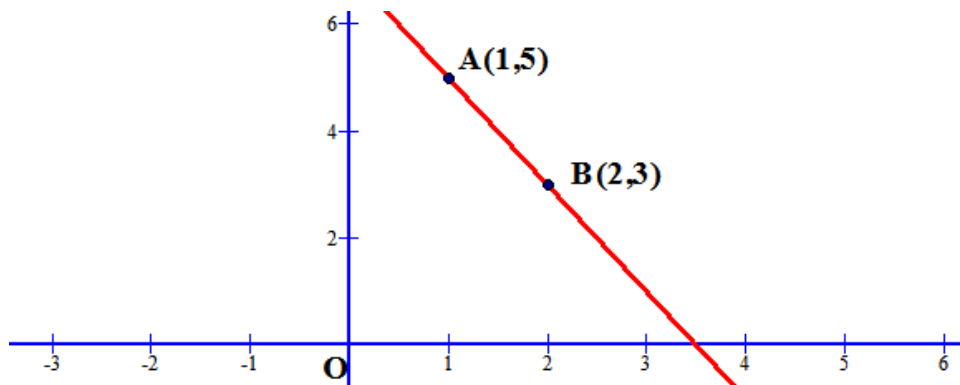
La recta tiene que ser de la forma  $y = mx + n$ , de donde ya conocemos la pendiente  $m = 2 \rightarrow y = 2x + n$

Como pasa por el punto  $(2, -3)$ , se ha de verificar la ecuación al sustituir la  $x$  por 2 y la  $y$  por -3  $\rightarrow$

$-3 = 4 + n \rightarrow n = -7$ . La recta es:  $y = 2x - 7$  y su gráfica es la siguiente:



Ejemplo: Dada la recta cuya gráfica es la siguiente, calcular su ecuación o criterio.



Al tratarse de una recta su ecuación o criterio será de la forma:  $y = m \cdot x + n$ . Como observamos pasa por los puntos A(1,5) y B(2,3) y sustituimos en la ecuación y planteamos el sistema de dos ecuaciones con dos

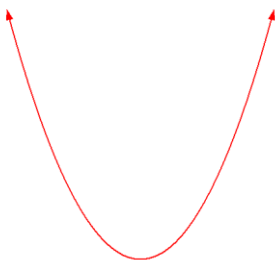
incógnitas para calcular m y n:  $\begin{cases} 5 = m \cdot 1 + n \\ 3 = m \cdot 2 + n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m + n = 5 \\ 2m + n = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = 7 \end{cases}$ . Por tanto se trata de la recta

$$f(x) = -2 \cdot x + 7$$

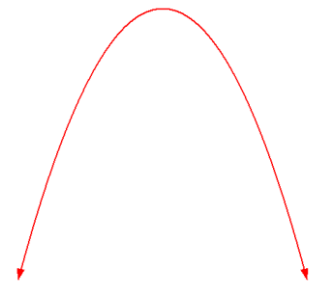
Nota: la pendiente la podíamos haber calculado por la fórmula dada en la propiedad  $m = \frac{d-b}{c-a} = \frac{3-5}{2-1} = -2$

## 2. FUNCIONES CUADRÁTICAS

Son funciones en las cuales su criterio es un polinomio de 2º grado, es decir, de la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Su dominio es todo R y su gráfica es una parábola, que es una figura como la siguiente:



ó

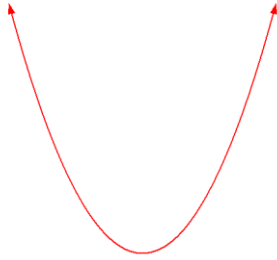


Para dibujarlas no es suficiente con una tabla de valores, sino que es necesario calcularle las siguientes propiedades, que las obtenemos a partir de su criterio  $f(x) = ax^2 + bx + c$ :

a) Estudio de la curvatura u orientación

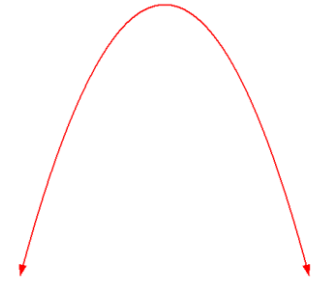
Lo calculamos a partir del signo del coeficiente  $a$

$$a > 0$$



Se dice que la parábola es CONVEXA

$$a < 0$$



Se dice que la parábola es CÓNCAVA

ó

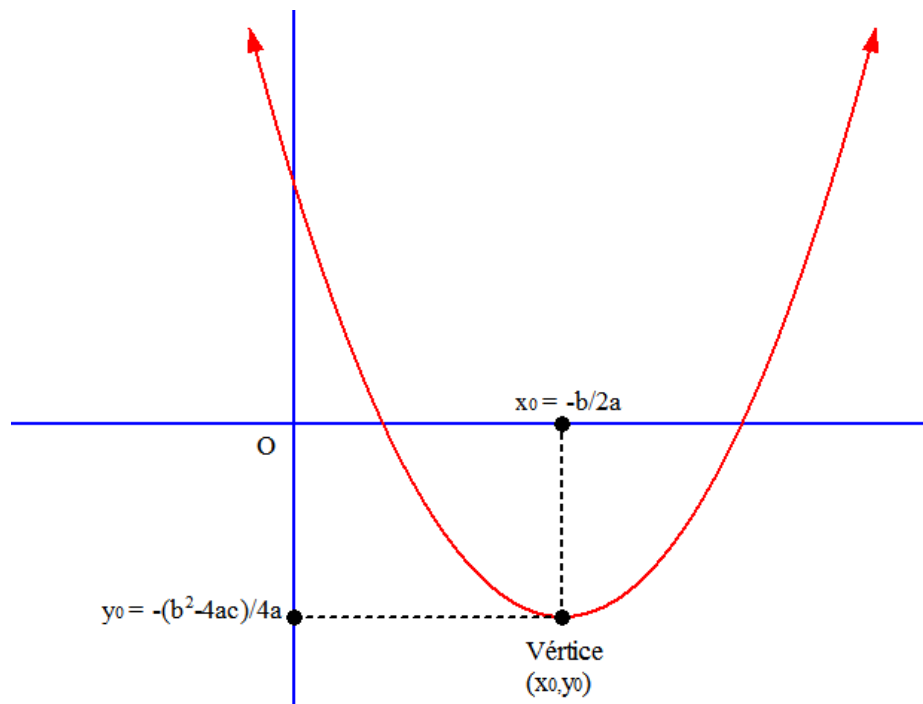
b) Cálculo del vértice

El vértice es el punto máximo o mínimo de la función cuadrática (máximo cuando  $a < 0$  y mínimo cuando  $a > 0$ )

El vértice  $V$  tiene por abscisa  $x_0 = \frac{-b}{2a}$ , y su ordenada  $y_0$  se obtiene de la ecuación, resultando, para quien

quiera saberlo de memoria  $V = \left( \frac{-b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$ .

En la figura se representa el vértice de una parábola con  $a > 0$  (es un mínimo absoluto)



c) Puntos de corte con eje OX

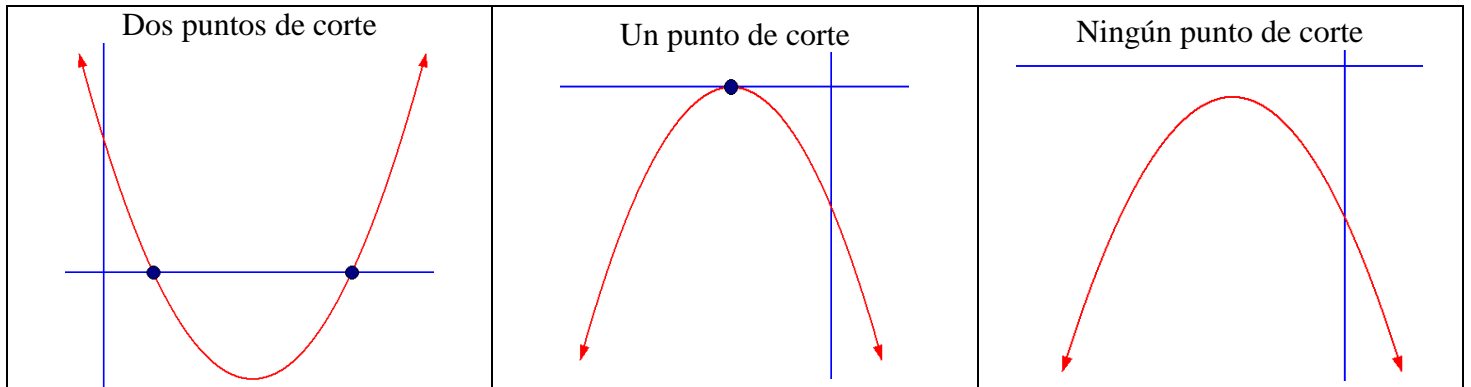
Se trata de calcular los puntos de corte de la parábola con el eje de abscisas, por ello tenemos que resolver el sistema asociado:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases}, \text{ que nos lleva a la ecuación de } 2^\circ \text{ grado } ax^2 + bx + c = 0, \text{ en la cual puede ocurrir que:}$$

- *Tenga dos soluciones:* Hay dos puntos de corte con el eje OX
- *Tenga una única solución:* Hay un único punto de corte, la parábola es tangente al eje OX

- No tenga ninguna solución: No hay corte con el eje OX

Gráficamente, sería así:

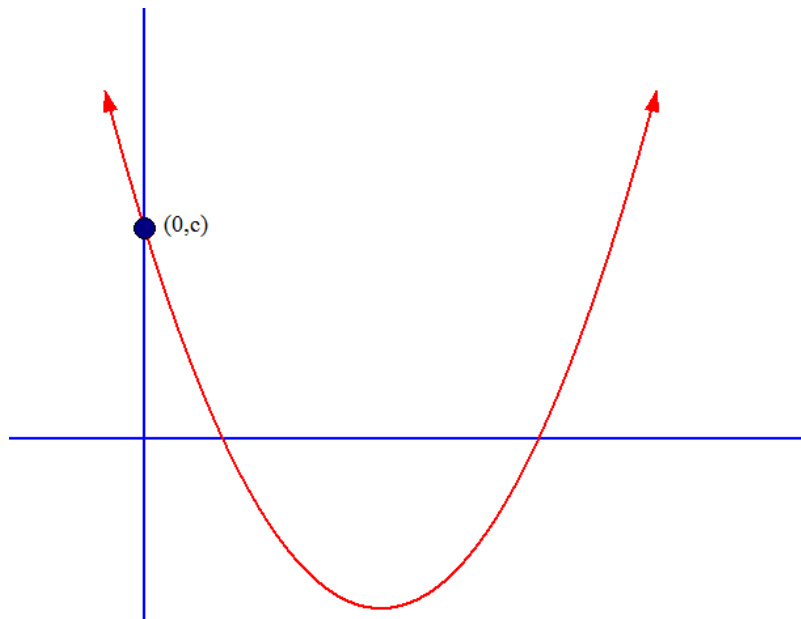


d) Punto de corte con eje OY

Se trata de calcular el punto de corte con el eje de ordenadas, que lo calculamos resolviendo el sistema asociado:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ x = 0 \end{cases}, \text{ que es trivial de resolver y nos resulta } \begin{cases} y = c \\ x = 0 \end{cases}. \text{ Por tanto, siempre es el punto } (0, c)$$

Gráficamente,

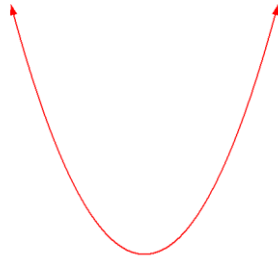


e) Tabla de valores

Poco que explicar en este punto, sólo que es conveniente darle valores próximos a la abscisa del vértice para que no nos salgan valores muy elevados

Ejemplo: Realizar la representación gráfica de la parábola  $y = x^2 - 5x + 4$

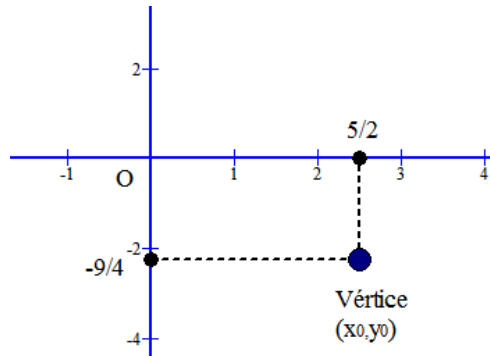
Curvatura: Como  $a = 1 > 0$ , tenemos que la parábola es convexa



Vértice:  $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-5)}{2 \cdot 1} = \frac{5}{2}$  Calculamos el correspondiente  $y_0 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{2} + 4 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 4 = \frac{-9}{4}$

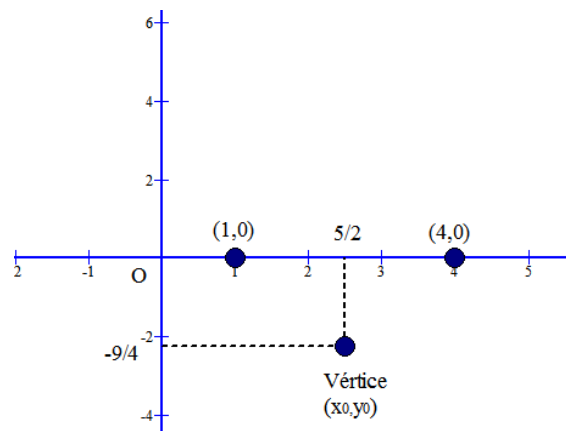
(sustituyendo en la fórmula o criterio de la función)

El vértice es  $V\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$



Cortes eje OX: Resolvemos  $\begin{cases} y = x^2 - 5x + 4 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$  Por tanto, los puntos de corte son:

(1,0) y (4,0)



Corte eje OY: Como sabemos el punto es  $(0,c) = (0,4)$

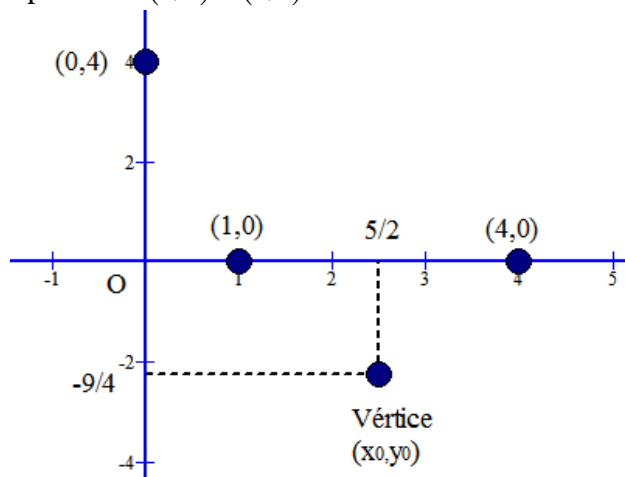
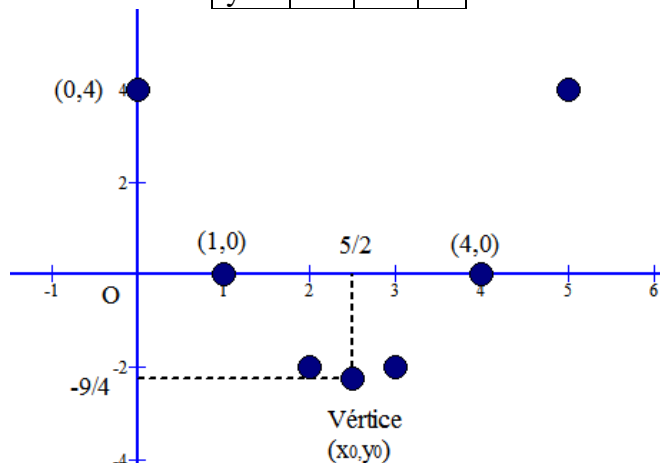
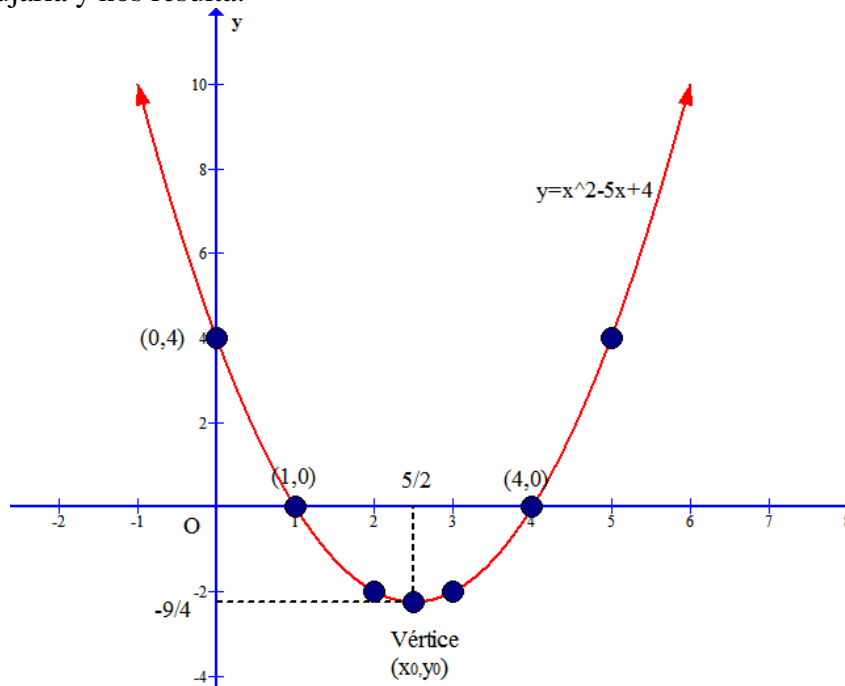


Tabla de valores: En este caso damos pocos valores, pues tenemos suficiente información para dibujarla ya:

x	2	3	5
y	-2	-2	4

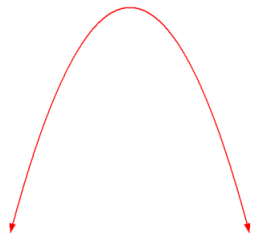


Ya procedemos al dibujarla y nos resulta:

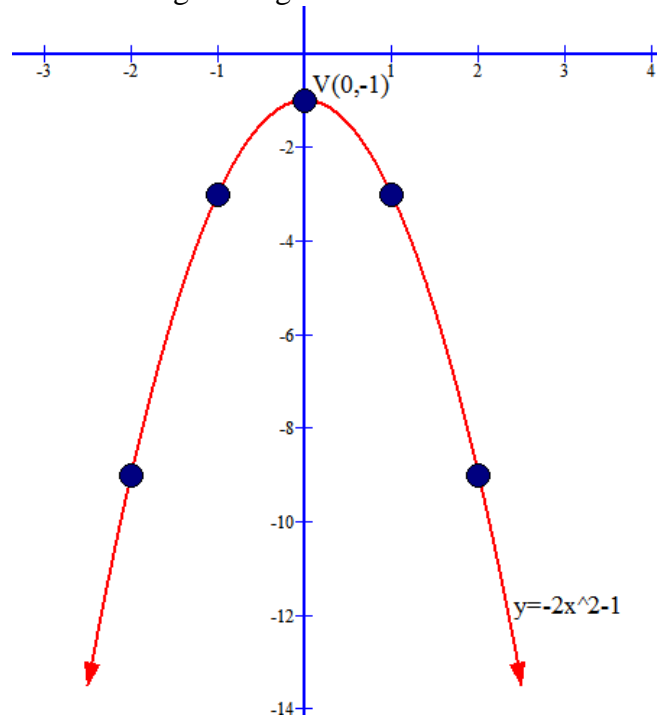


Además, como ya tenemos la gráfica:  $Re\ corr(f) = \left[ -\frac{9}{4}, +\infty \right)$

Ejemplo: Lo mismo para la función  $y = -2x^2 - 1$

<p><u>Concavidad</u>: Como <math>a = -2 &lt; 0</math>, es cóncava</p> 	<p><u>Vértice</u>: <math>x_0 = \frac{-0}{2 \cdot (-2)} = 0 \rightarrow y_0 = -1</math> Luego <math>V(0, -1)</math></p>														
<p><u>Corte eje OX</u>: Resolvemos <math>\begin{cases} y = -2x^2 - 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow</math> <math>-2x^2 - 1 = 0 \rightarrow</math> No existen soluciones, no hay cortes</p>	<p><u>Corte eje OY</u>: Como sabemos el punto es <math>(0, c) = (0, -1)</math>. Coincide con el vértice</p>														
<p><u>Tabla de valores</u>:</p> <table border="1" data-bbox="71 2004 558 2083"> <tr> <td>x</td> <td>1</td> <td>-1</td> <td>2</td> <td>-2</td> <td>3</td> <td>-3</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>-3</td> <td>-3</td> <td>-9</td> <td>-9</td> <td>-19</td> <td>-19</td> </tr> </table>	x	1	-1	2	-2	3	-3	y	-3	-3	-9	-9	-19	-19	
x	1	-1	2	-2	3	-3									
y	-3	-3	-9	-9	-19	-19									

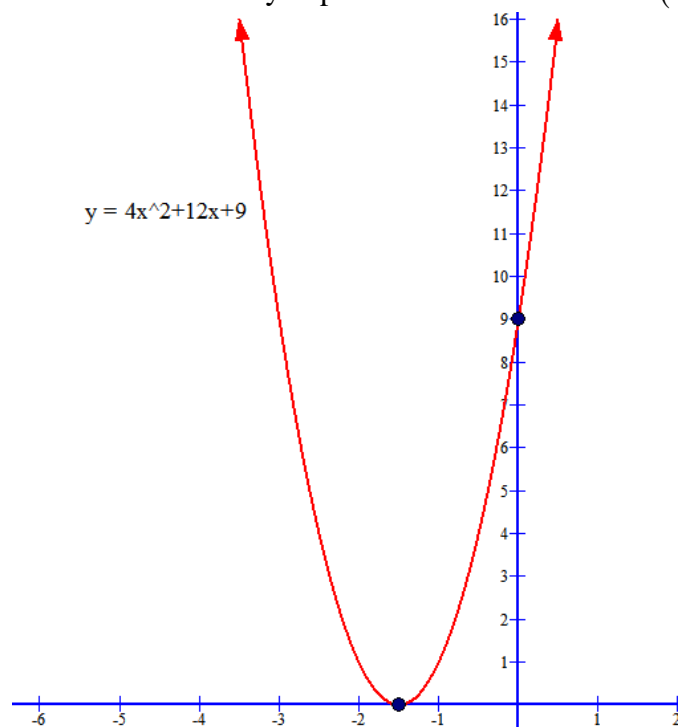
Con los datos anteriores nos debe salir la siguiente gráfica:



Además, como ya tenemos la gráfica:  $\text{Im}(f) = (-\infty, -1]$

Ejemplo: Idem para  $y = 4x^2 + 12x + 9$

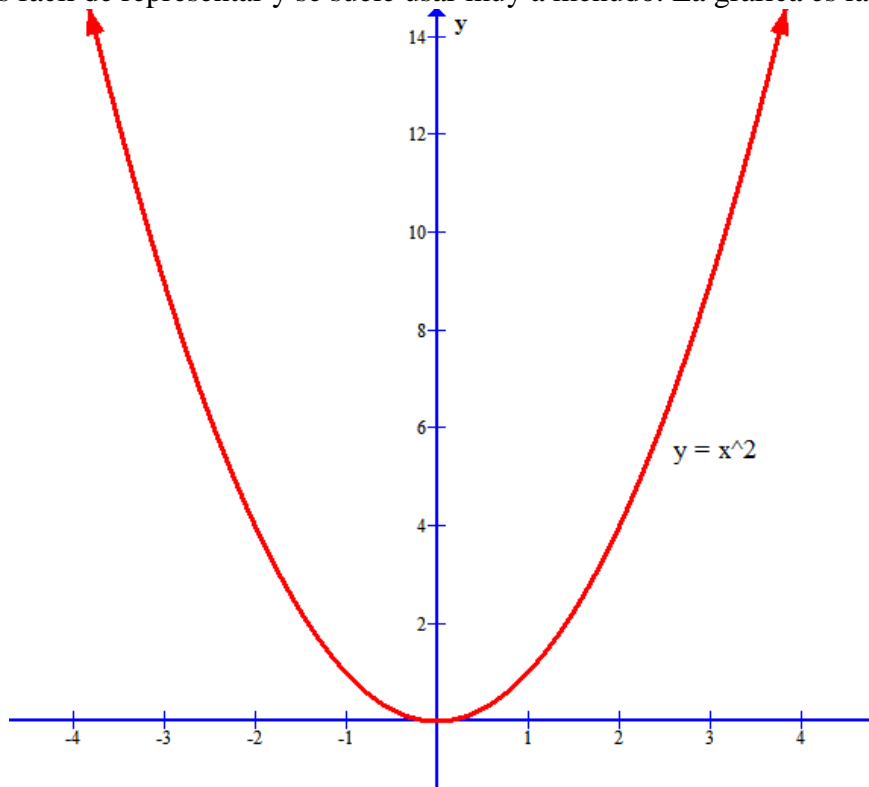
Este ejemplo os lo dejo a vosotros el estudio detallado, pero resulta que es convexa, tiene vértice en  $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$ , que coincide con el único punto de corte con OX y el punto de corte con OY es  $(0, 9)$ . La gráfica es:



Además, como ya tenemos la gráfica:  $\text{Re corr}(f) = [0, +\infty)$



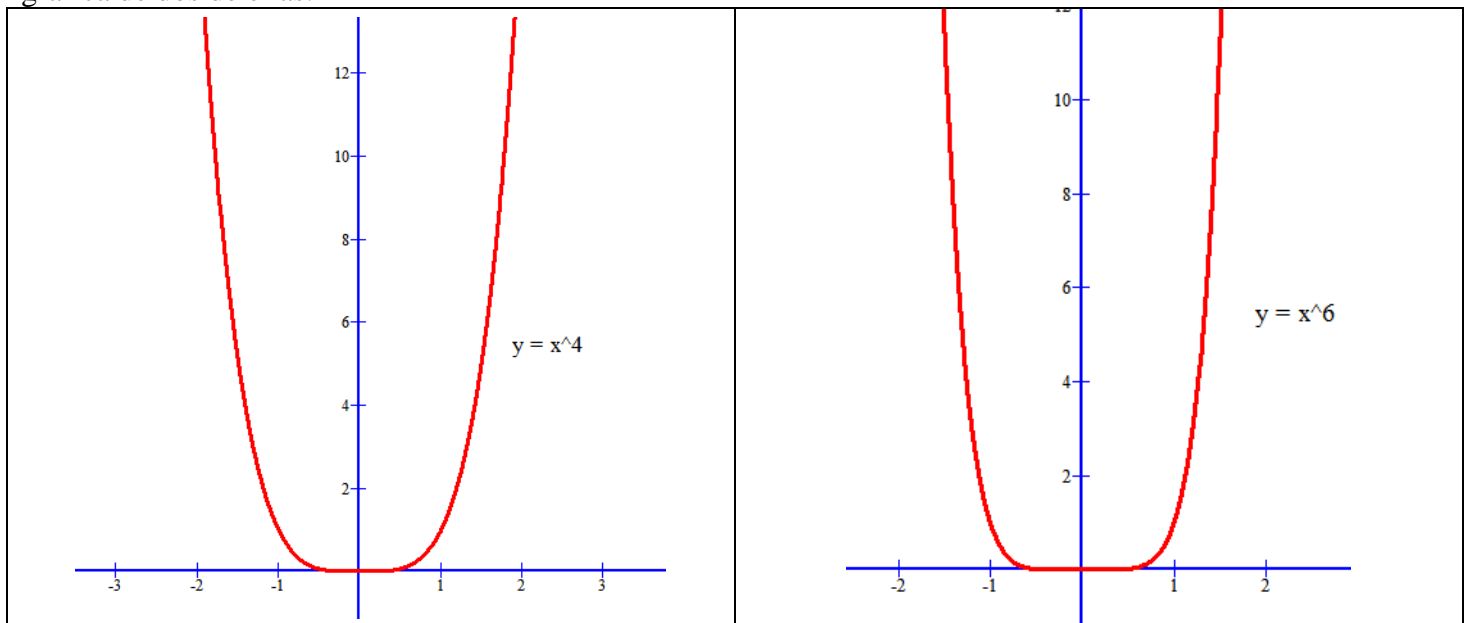
**NOTA:** Hay una parábola especial conocida como parábola canónica que es  $f(x) = x^2$ , que es la más simple de todas ellas y la más fácil de representar y se suele usar muy a menudo. La gráfica es la siguiente:



### 3. FUNCIONES POTENCIALES DE EXPONENTE NATURAL

#### a) Funciones potenciales de exponente natural par

Son funciones de la forma  $f(x) = x^n$  donde  $n \in \mathbb{N}$  y es par, por ejemplo como  $y = x^2$ ,  $y = x^4$ ,  $y = x^6$ , etc. Su dominio es todo  $\mathbb{R}$  al ser polinómicas y su gráfica es muy parecida a la de una parábola. Aquí tenéis la gráfica de dos de ellas:

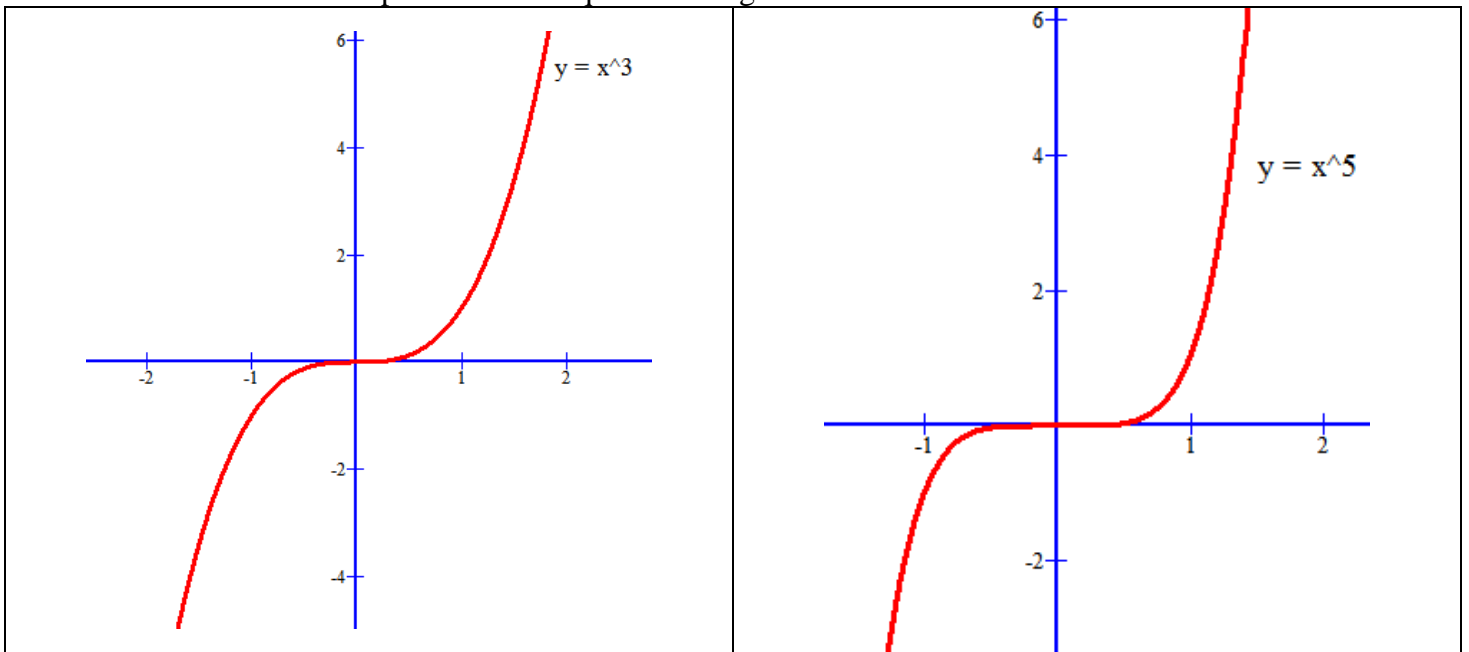


Presentan simetría par (simétricas respecto del eje de ordenadas)  $f(x) = f(-x)$

Están acotadas inferiormente. Su imagen es  $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

b) Funciones potenciales de exponente natural impar

Son funciones de la forma  $f(x) = x^n$  donde  $n \in \mathbb{N}$  y es impar, por ejemplo como  $y = x^3$ ,  $y = x^5$ ,  $y = x^7$ , etc. Su dominio es todo  $\mathbb{R}$  al ser polinómicas. Aquí tenéis la grafica de dos de ellas:



Presentan simetría impar (simétricas respecto del origen de coordenadas)  $f(x) = -f(-x)$   
No están acotadas. Su imagen es todo  $\mathbb{R}$