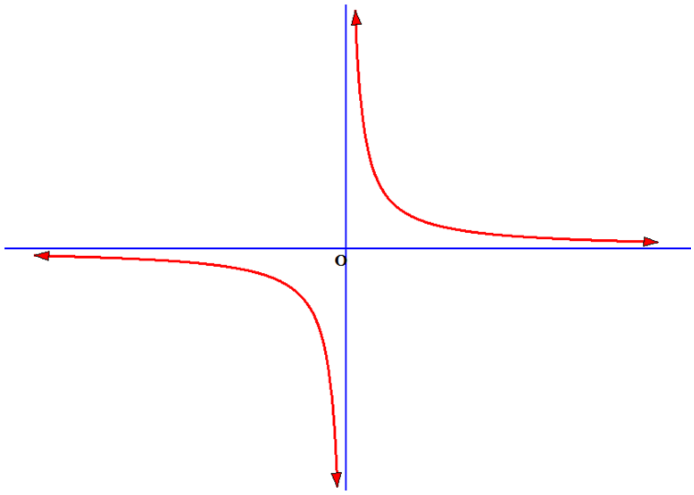
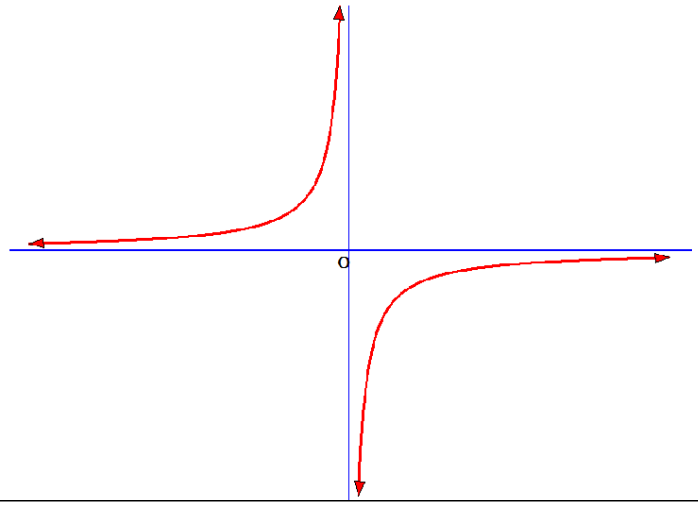
UNIDAD 8.- **Funciones racionales** *(tema 8 del libro)*

1. FUNCIÓNES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

Las *funciones de proporcionalidad inversa* son funciones cuya expresión es de la forma $f(x)=\dfrac{k}{x}$

Las gráficas de estas funciones son o se llaman *hipérbolas equiláteras* cuyas asíntotas son los ejes coordenados. Pueden ser de estas dos formas:

$k>0$	$k<0$
	

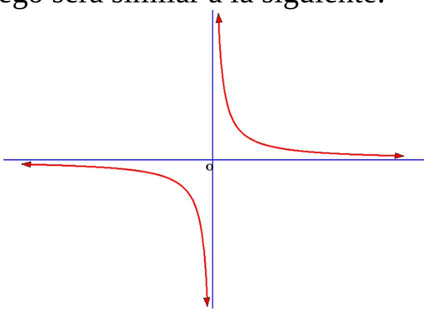
Propiedades: Estas funciones tienen las siguientes propiedades

- *Dominio*: Se tiene que $Dom(f)=R-\{0\}$
- *Recorrido*: Se tiene que $\mathrm{Im}(f)=R-\{0\}$
- *Monotonía*: Se tiene que:
    - *Si* $k>0$, la función es estrictamente decreciente en todo su dominio
    - *Si* $k<0$, la función es estrictamente creciente en todo su dominio
- *Extremos relativos*: No tienen
- *Acotación*: No están acotadas ni superior ni inferiormente
- *Simetría*: Son funciones impares, es decir, presentan simetría respecto del origen de coordenadas
- *Asíntotas*: Se tiene que:
    - El eje OY (la recta $x=0$) es asíntota vertical por la derecha a $+\infty$ y por la izquierda a $-\infty$ si $k>0$. Al contrario, es asíntota vertical por la derecha a $-\infty$ y por la izquierda a $+\infty$ si $k<0$
    - El eje OX (la recta $y=0$) es asíntota horizontal en $+\infty$ y en $-\infty$

Representación gráfica: Para dibujar este tipo de funciones hay que tener en cuenta el signo de k y hacer una tabla de valores, teniendo en cuenta las propiedades anteriores. Veamos un par de ejemplos.

Ejemplo: Representa gráficamente la función $f(x)=\dfrac{2}{x}$

En este caso tenemos que $k=2>0$, luego será similar a la siguiente:

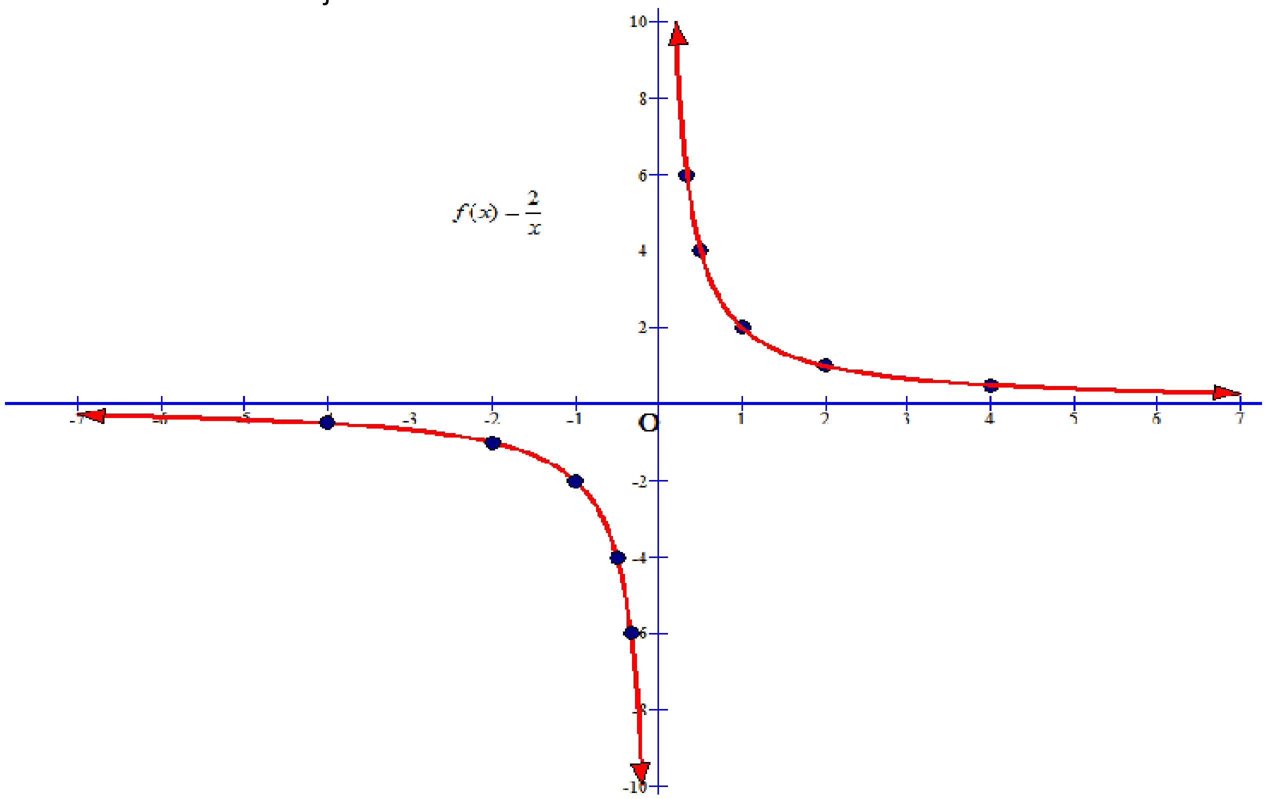


Realizamos una tabla de valores:

x	-4	-2	-1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$y=\frac{2}{x}$	$\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}=-0{\acute{}}5$	$\frac{2}{-2}=-1$	$\frac{2}{-1}=-2$	$\frac{2}{-1/2}=-4$	$\frac{2}{-1/3}=-6$	$\frac{2}{1/3}=6$	$\frac{2}{1/2}=4$

x	1	2	4
$y=\frac{2}{x}$	2	1	$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0{\acute{}}5$

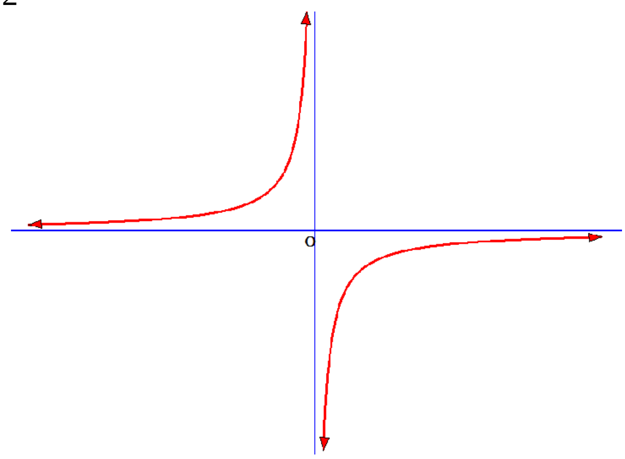
Y pasamos directamente a dibujarla:



Ejemplo: Representa gráficamente la función $y=\frac{-1}{2\cdot x}$

Hemos de darnos cuenta que la función se puede poner como $y=\frac{-1/2}{x}$

En este caso tenemos que $k=\frac{-1}{2}<0$, luego será similar a la siguiente:

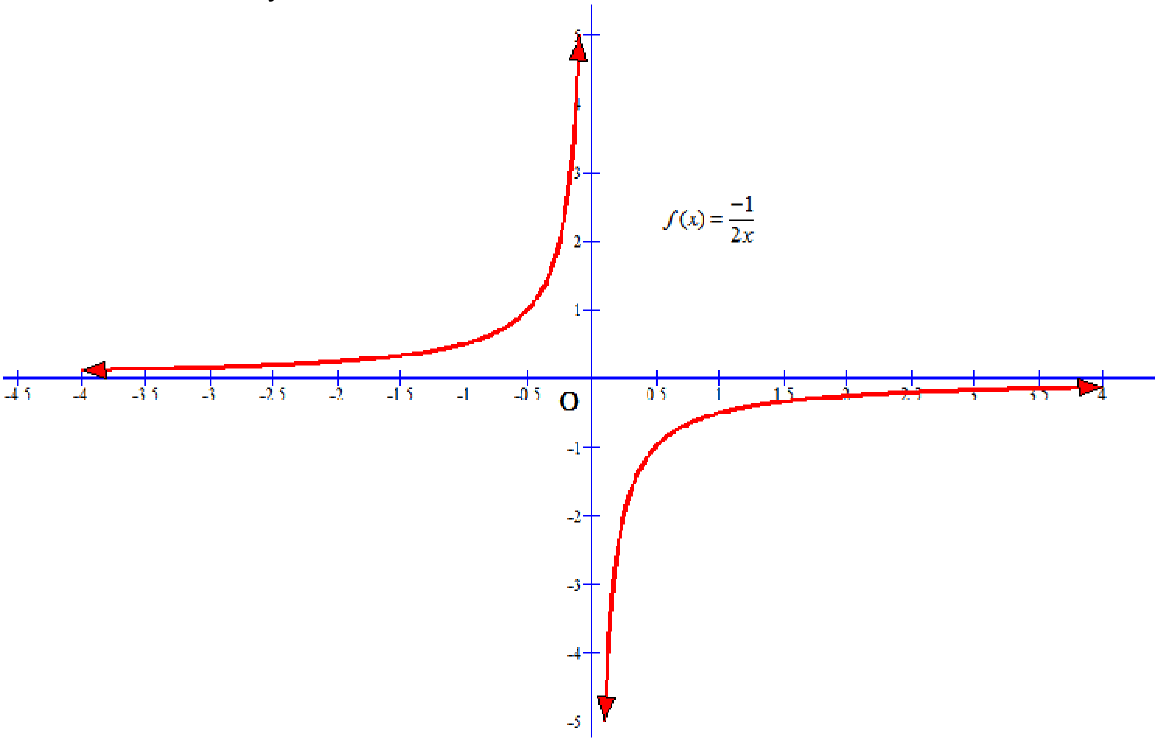


Realizamos una tabla de valores:

x	-4	-2	-1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$y=\frac{2}{x}$	$\frac{1}{8}=0'125$	$\frac{1}{4}=0'25$	$\frac{1}{2}=0'5$	1	$\frac{3}{2}=1'5$	$\frac{-3}{2}=-1'5$	-1

x	1	2	4
$y=\frac{2}{x}$	$\frac{-1}{2}=-0'5$	$\frac{-1}{4}=-0'25$	$\frac{-1}{8}=-0'125$

Y pasamos directamente a dibujarla:



2. <u>FUNCIONES DE LA FORMA</u> $y=\dfrac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}$

Las gráficas de las funciones del tipo $y=\dfrac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}$ son también hipérbolas equiláteras.
En estos casos, las asíntotas que tiene son las siguientes:

- Asíntota horizontal en $+\infty$ y en $-\infty$: la recta de ecuación $\boxed{y=\frac{a}{c}}$
- Asíntota vertical por la derecha y por la izquierda: la recta de ecuación $\boxed{x=-\frac{d}{c}}$

<u>Ejemplo</u>: Representar gráficamente la función $y=\dfrac{2x+2}{x-1}$

Por lo anterior tenemos que:

Asíntota horizontal en $+\infty$ y en $-\infty$: $y=\frac{2}{1}\Rightarrow y=2$

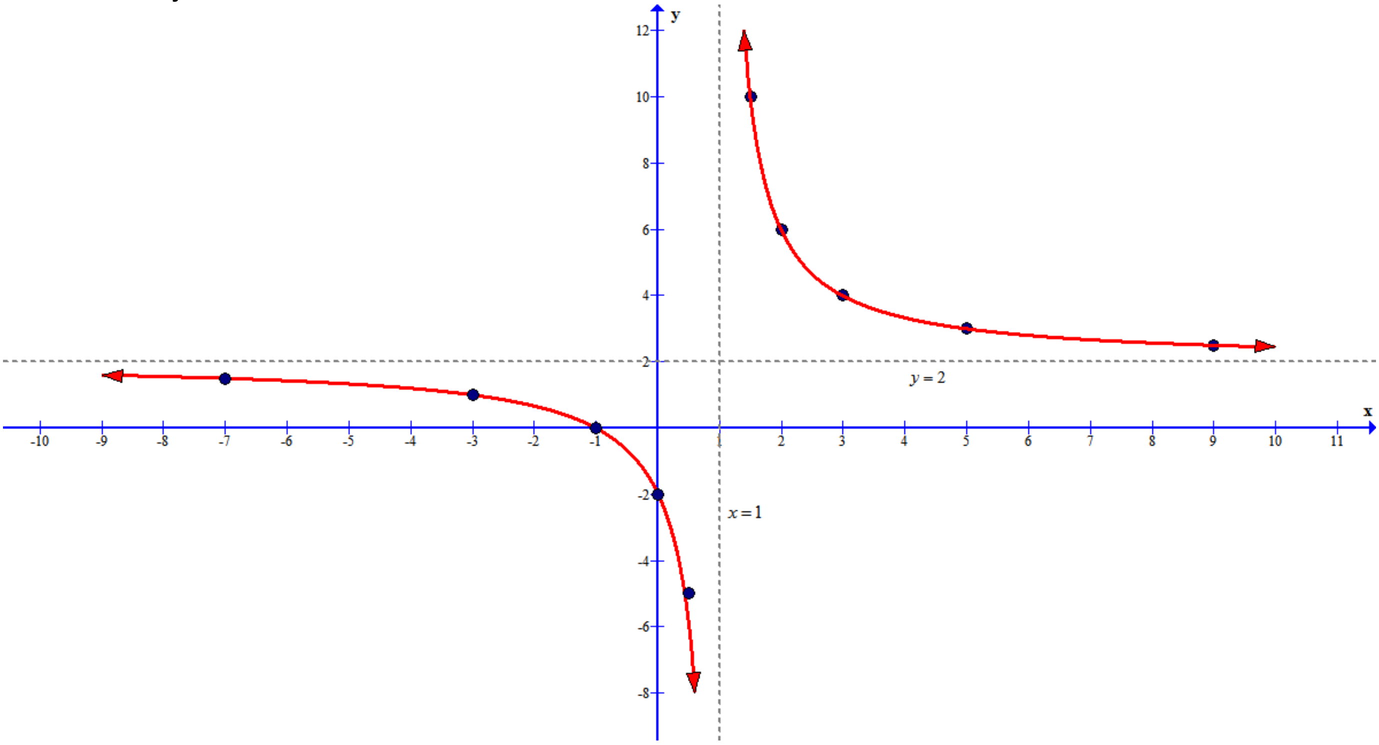
Asíntota vertical por la derecha y por la izquierda: $x=-\frac{-1}{1}\Rightarrow x=1$

Construimos una tabla de valores para conocer por donde se representa la hipérbola equilátera.

x	-7	-3	-1	0	0,5	1,5	2
$y=\dfrac{2x+2}{x-1}$	1,5	1	0	-2	-5	10	6

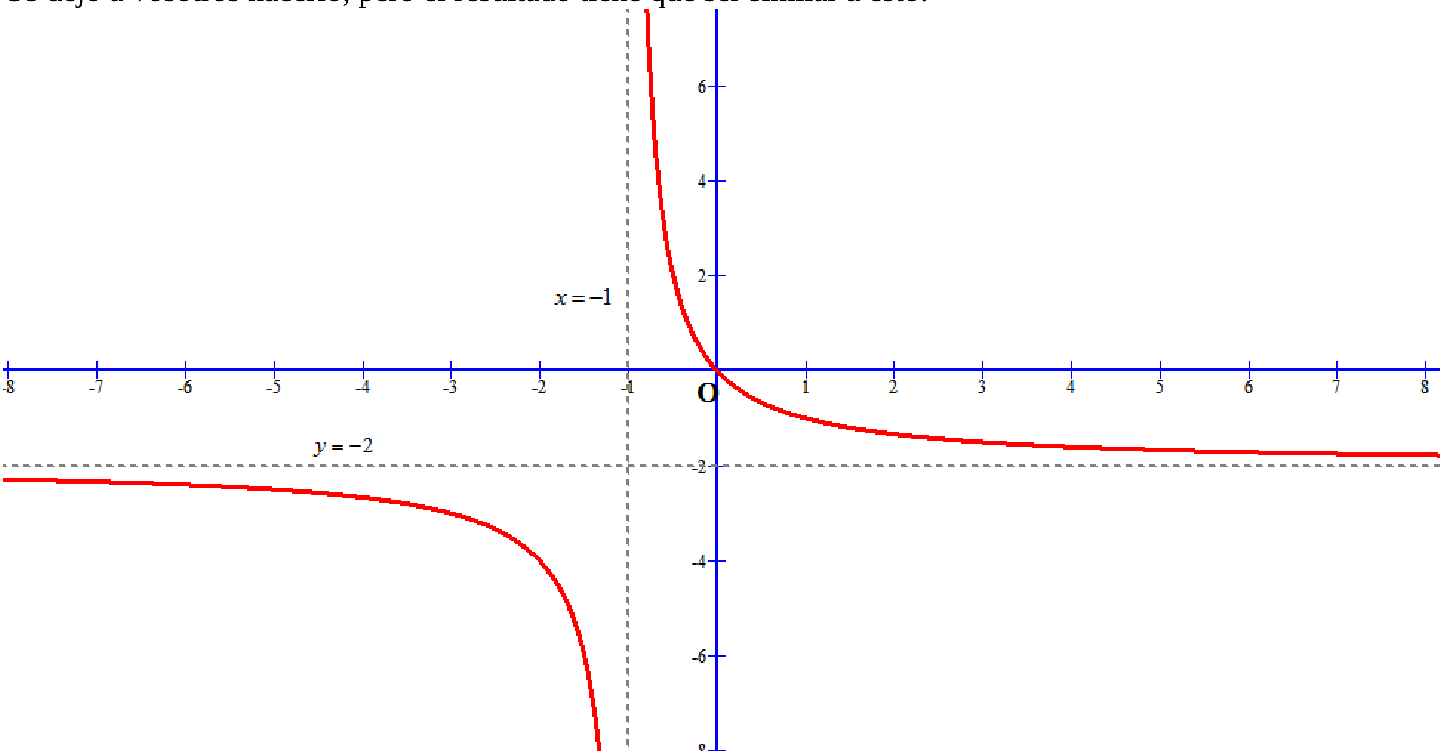
x	3	5	9
$y=\dfrac{2x+2}{x-1}$	4	3	2,5

Pasamos a dibujarla teniendo en cuenta todo lo obtenido:



Ejemplo: Representar gráficamente la función $y=\dfrac{-6x}{3x+3}$

Os dejo a vosotros hacerlo, pero el resultado tiene que ser similar a esto:



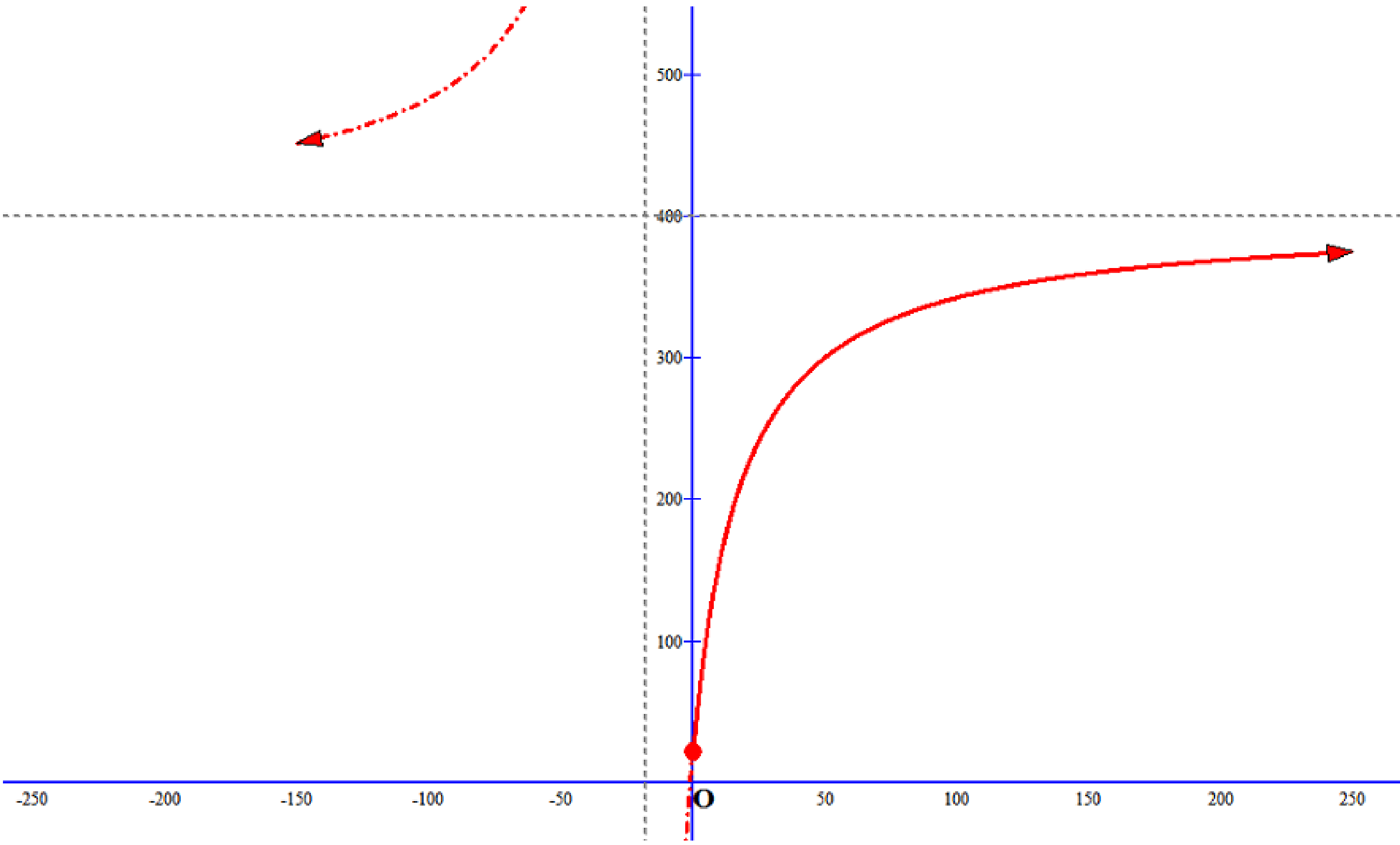
Ejemplo: La función $f(x)=\dfrac{400x+400}{x+18}$ nos da el número de pulsaciones por minuto de una persona que está aprendiendo a teclear un ordenador en función del número de clases particulares, de una hora, a las que asiste.

a) ¿Cuántas pulsaciones por minuto da al comienzo de las clases y cuántas dará al cabo de 3, 5 y 20 clases recibidas?
b) ¿Cuántas horas debe practicar para dar 300 pulsaciones por minuto?
c) Representa la gráfica de la función.
d) A la vista de la gráfica, responde a las siguientes cuestiones:
   1. ¿A partir de qué número de clases alcanza más de 300 pulsaciones por minuto?
   2. ¿Qué nº de clases debe recibir para alcanzar las 500 pulsaciones por minuto?
   3. ¿Qué nº máximo de pulsaciones por minuto puede llegar a alcanzar?

a) Al comienzo de las clases, como *x* = 0 horas, resultan $f(0)=\dfrac{400\cdot 0+400}{0+18}=22.2$ pulsaciones por minuto. Para 3 clases tenemos $f(3)=\dfrac{400\cdot 3+400}{3+18}=76{,}2$ pulsaciones por minuto. Para 5 clases nos da $f(5)=\dfrac{400\cdot 5+400}{5+18}=104{,}3$ pulsaciones por minuto y para 20 clases nos resulta $f(20)=\dfrac{400\cdot 20+400}{20+18}=221{,}1$ pulsaciones por minuto.

b) Para alcanzar las 300 pulsaciones por minuto debe practicar *x* horas, de modo que resolvemos la ecuación: $\dfrac{400\cdot x+400}{x+18}=300 \rightarrow 300\cdot(x+18)=400\cdot x+400 \rightarrow x=50$ horas

c) Vamos a representarla gráficamente con los puntos obtenidos anteriormente y con sus asíntotas
Asíntota horizontal: $y=400$
Asíntota vertical: $x=-18$
En trazo discontinuo la parte de la hipérbola que no interesa para el problema. Sólo nos interesa a partir de $x=0$

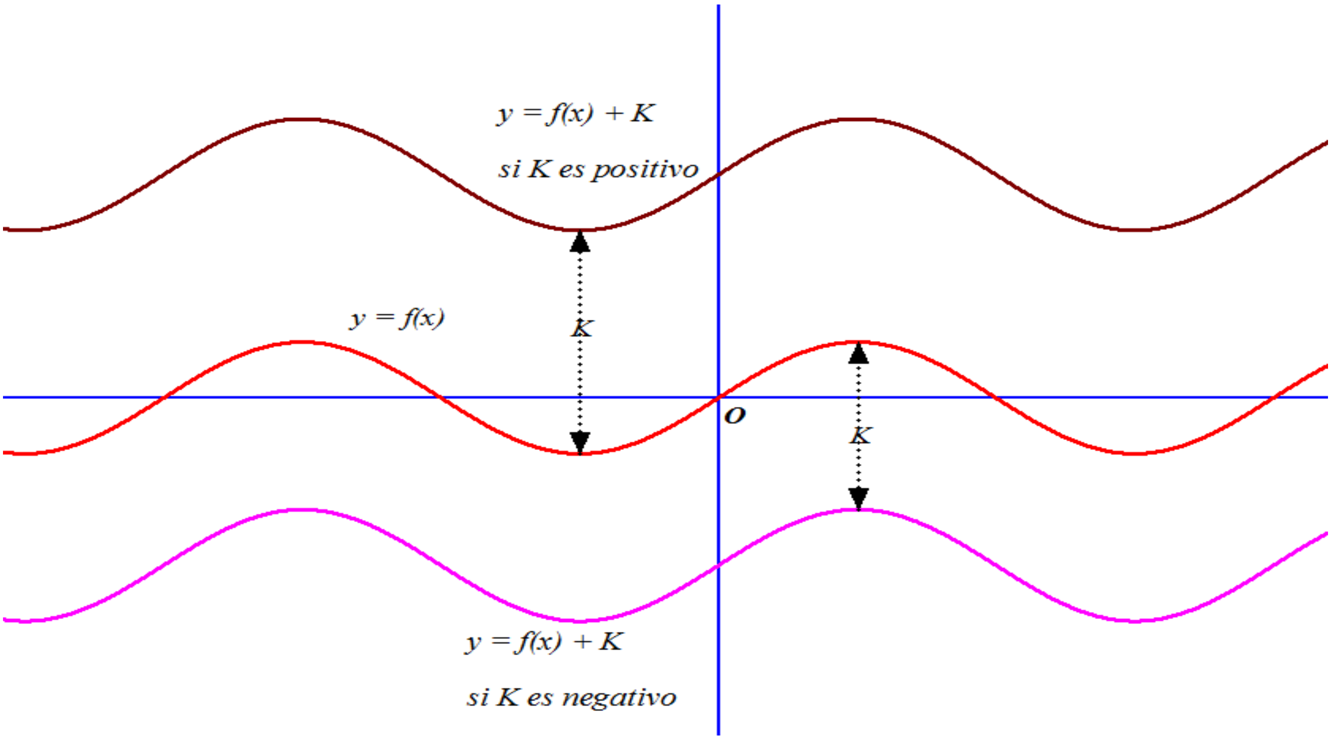


d) Tenemos que:
   1. Alcanza más de 300 pulsaciones/min al recibir más de 50 clases.
   2. Observando la gráfica vemos que nunca alcanzará las 500 pulsaciones/min.
   3. El nº máximo de pulsaciones por minuto que puede llegar a alcanzar se acerca a 400 que es su asíntota horizontal

3. TRASLACIONES DE GRÁFICAS DE FUNCIONES

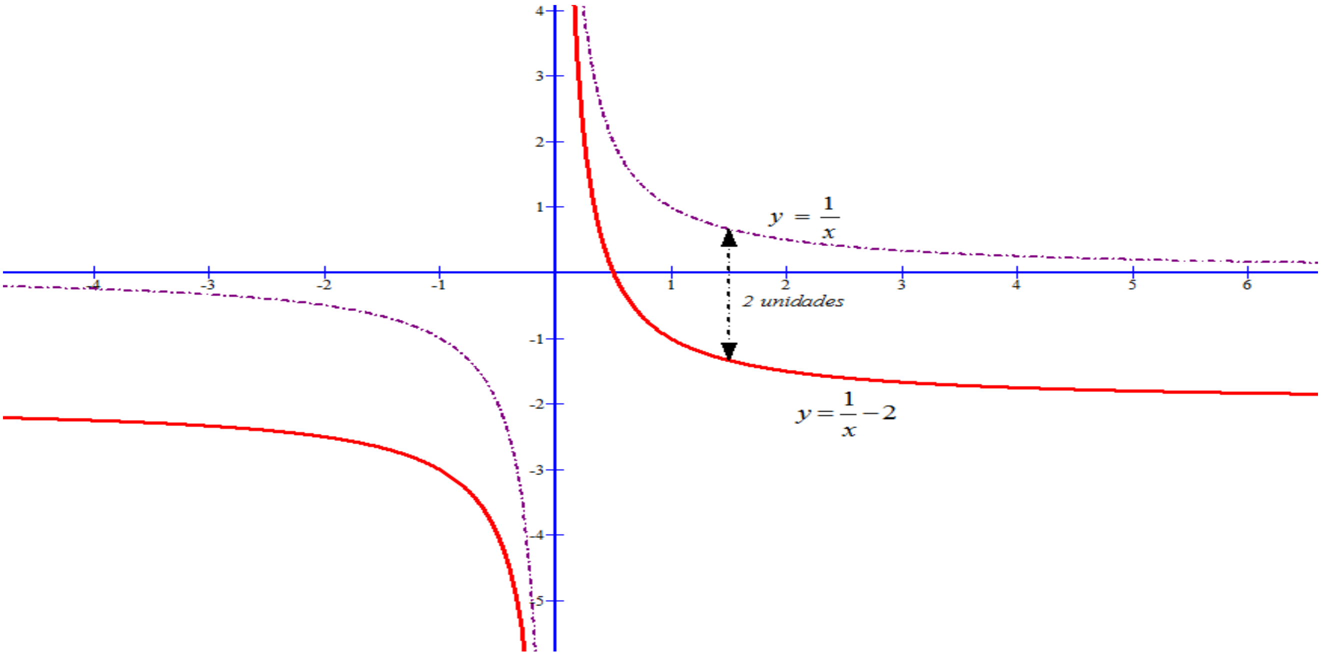
a) Traslaciones verticales

Las gráficas de las funciones $y = f(x) + K$ se obtienen al trasladar verticalmente la gráfica de la función $y = f(x)$, K unidades hacia arriba si K es positivo, o K unidades hacia abajo si K es negativo



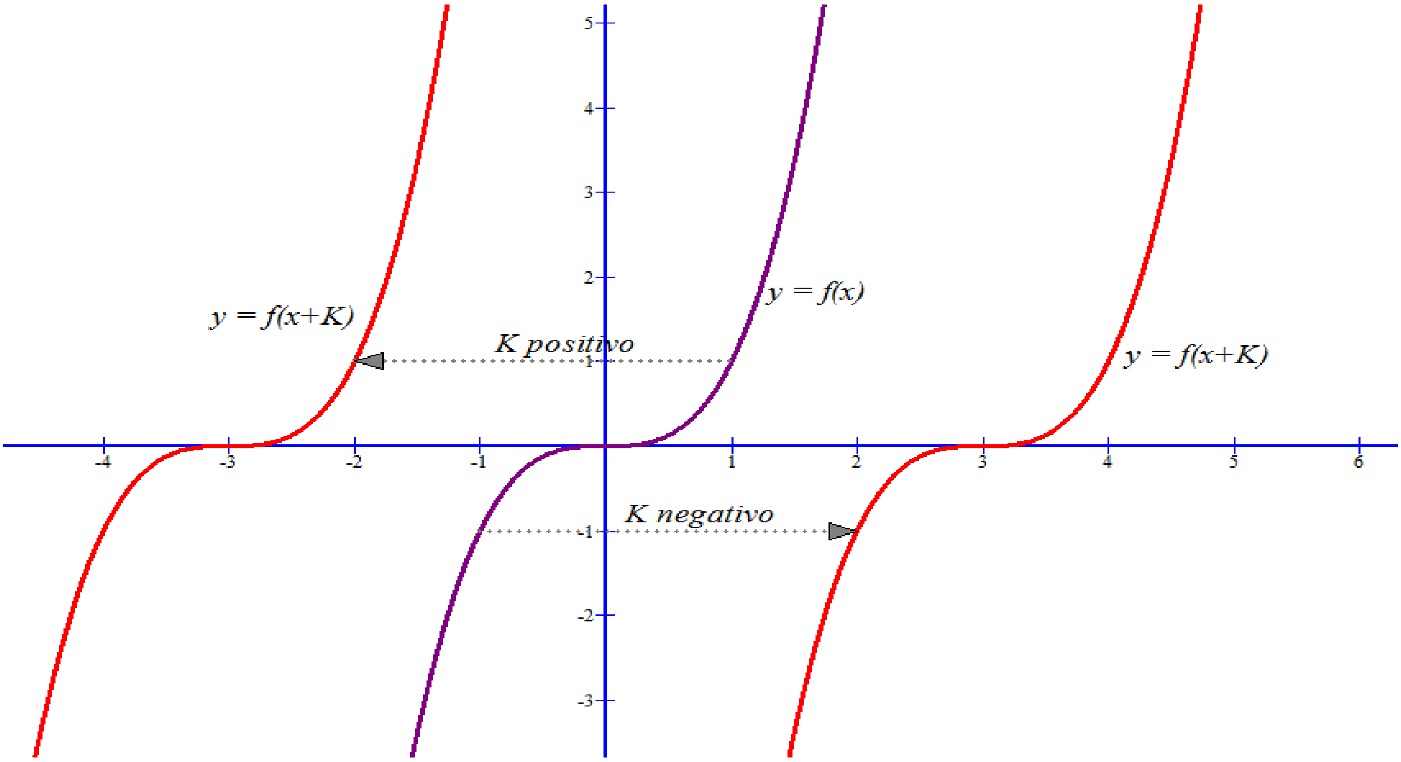
Ejemplo: Representar gráficamente la función $y = \frac{1}{x} - 2$

Como vemos se trata de una traslación vertical hacia abajo en 2 unidades de la hipérbola equilátera $y = \frac{1}{x}$



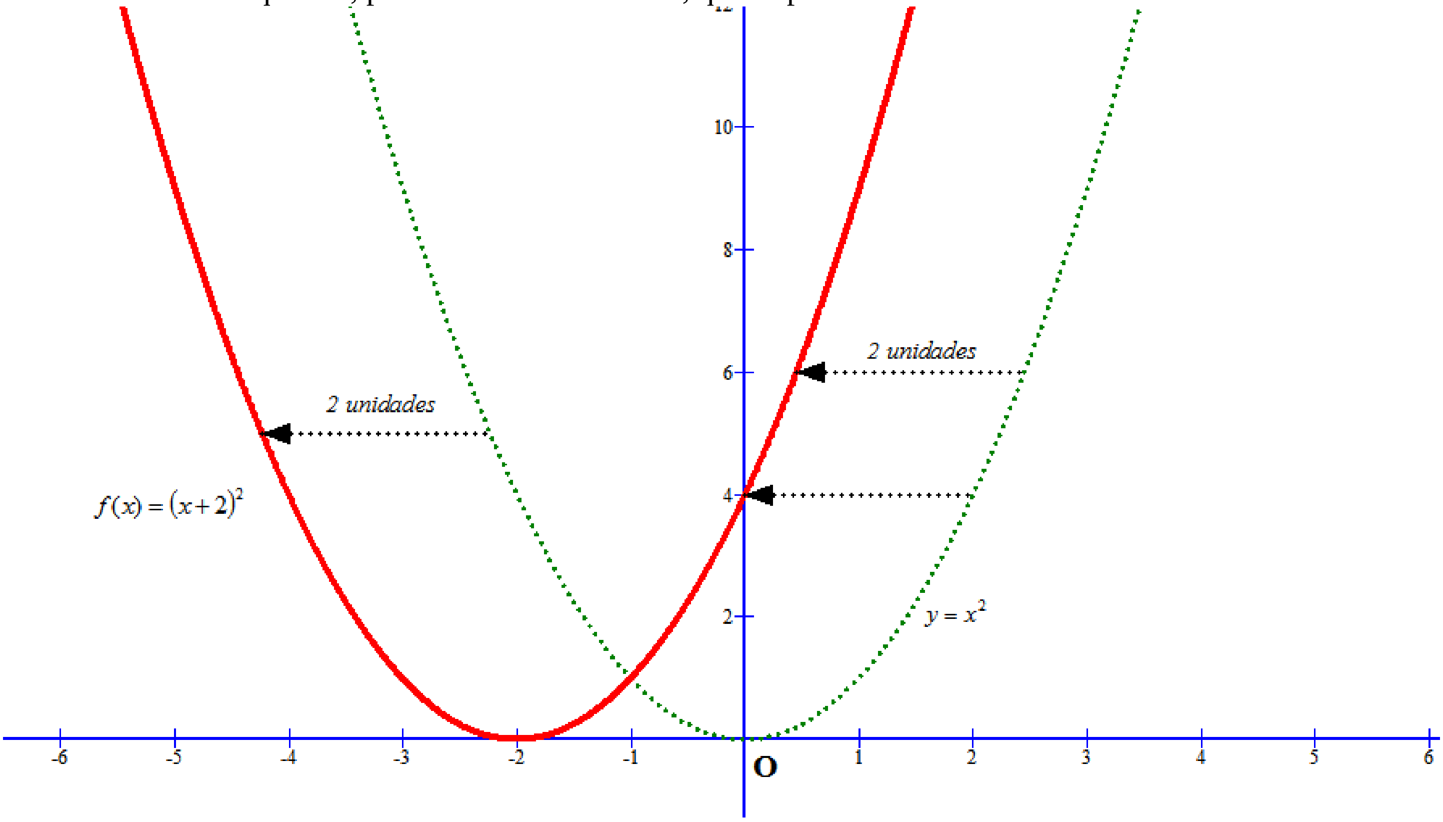
b) *Traslaciones horizontales*

Las gráficas de las funciones $y = f(x+K)$ se obtienen al trasladar horizontalmente la gráfica de la función $y = f(x)$, K unidades hacia la izquierda si K es positivo, o K unidades hacia la derecha si K es negativo



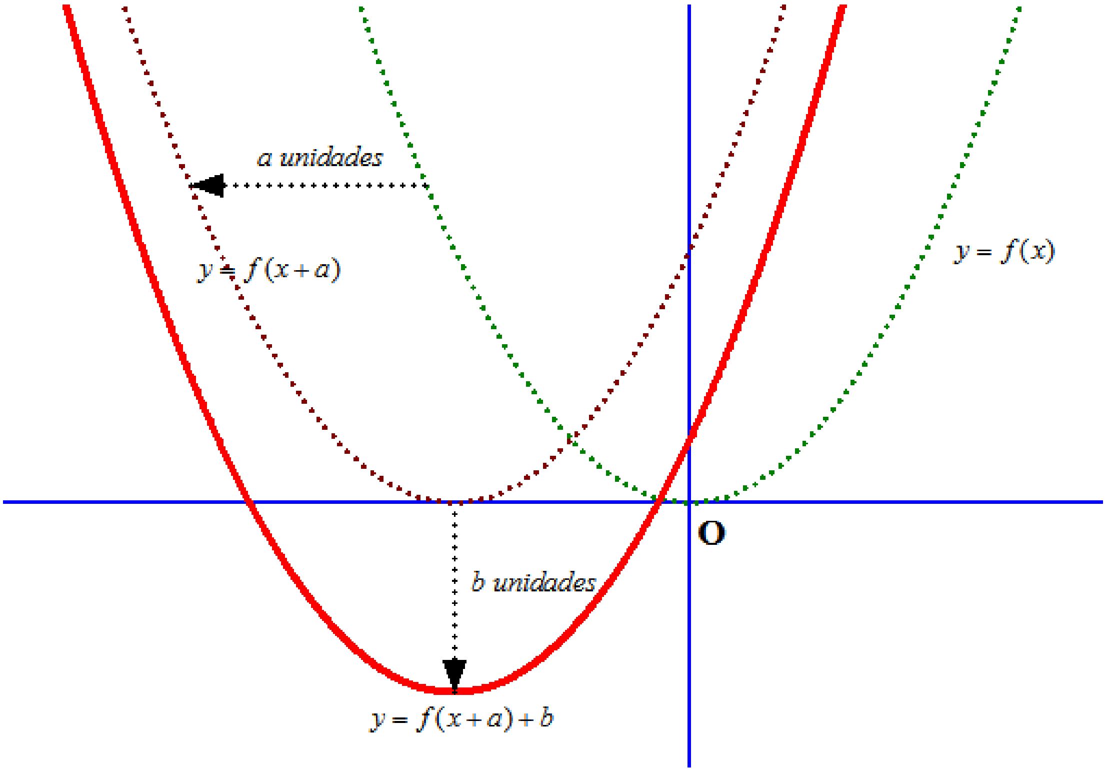
Ejemplo: Representar gráficamente la función $f(x) = (x+2)^2$

Si nos fijamos podemos entender esta función como una traslación horizontal de la función $f(x) = x^2$ dos unidades hacia la izquierda, pues en este caso $K = 2$, que es positivo



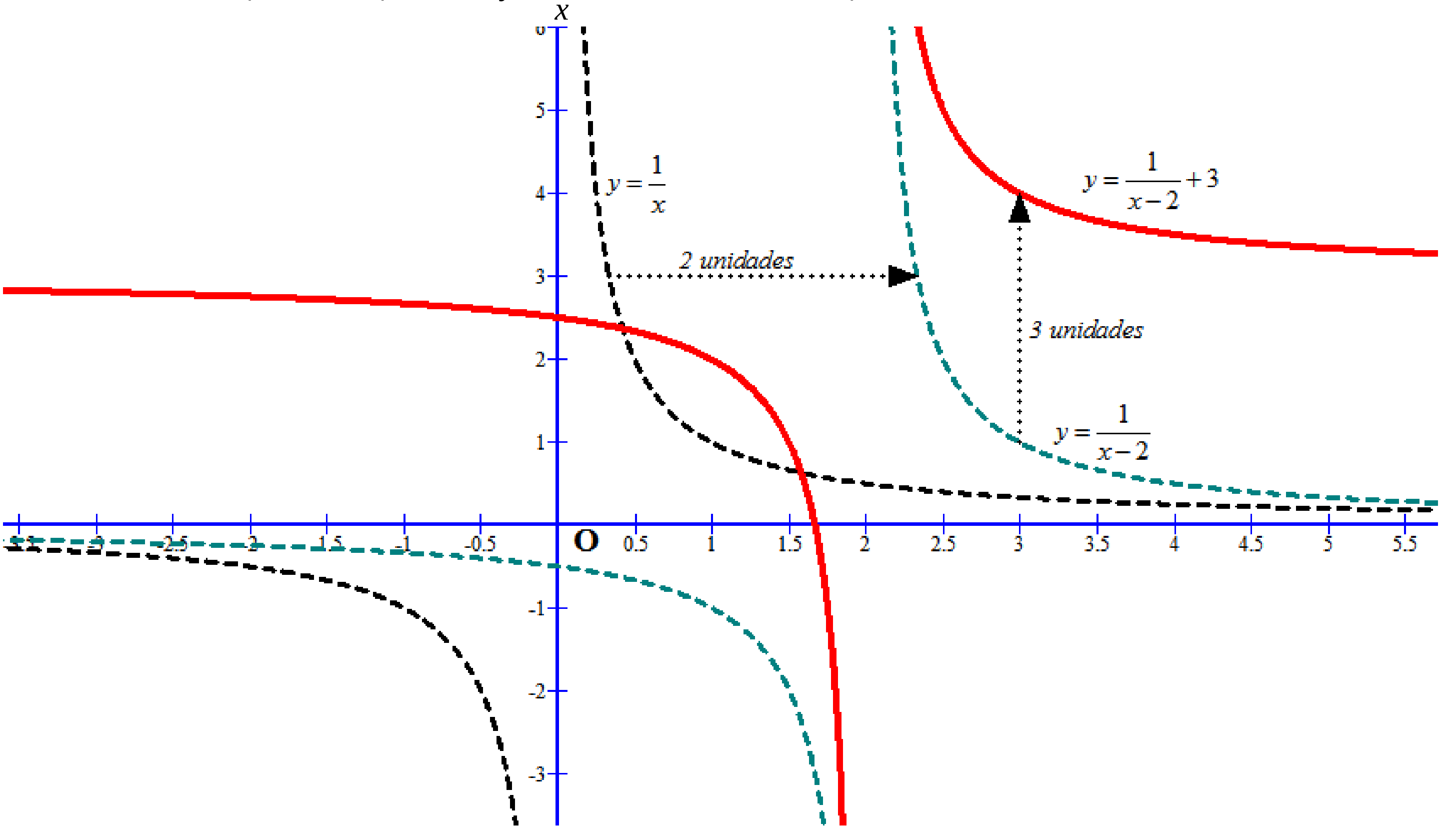
c) Composición de traslaciones

Estas son más complicadas, pues se componen primero de una traslación vertical seguida de una horizontal, o viceversa, una traslación horizontal seguida de una vertical.
Las gráficas de las funciones $y = f(x+a)+b$ son funciones de este tipo. Gráficamente sería así:



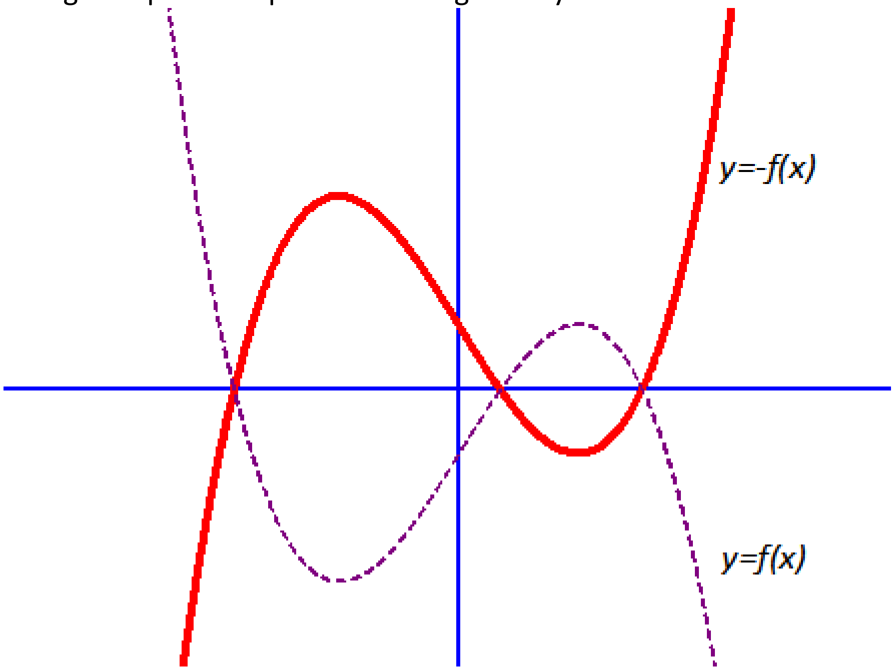
Ejemplo: Representar gráficamente la función $y = \dfrac{1}{x-2}+3$

Como vemos se trata de una traslación horizontal hacia la derecha de 2 unidades y en vertical hacia arriba de 3 unidades de la hipérbola equilátera $y = \dfrac{1}{x}$. Gráficamente nos quedaría:



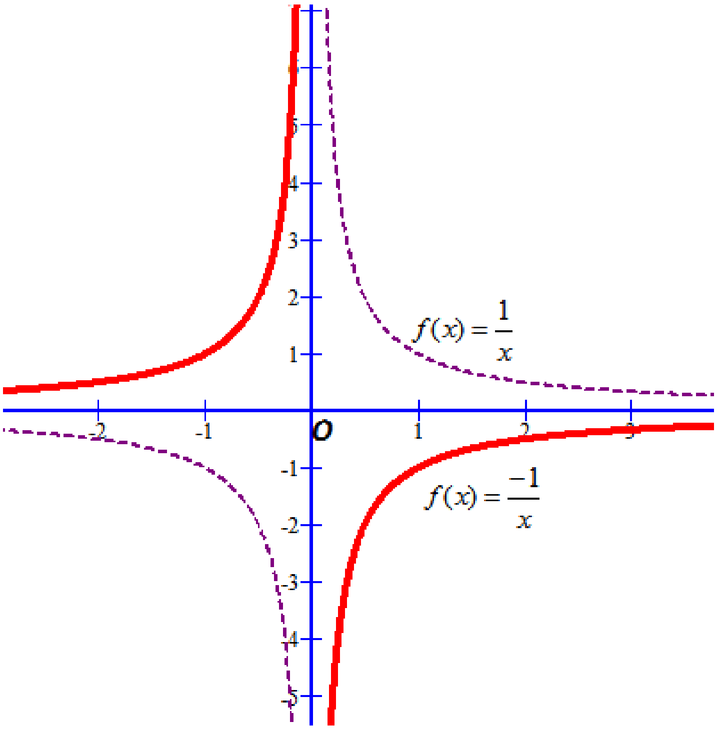
4. FUNCIONES OPUESTAS

Dos funciones son opuestas si sumadas dan la función nula. La opuesta de una función $y = f(x)$ se denota por $y = -f(x)$, y su gráfica se obtiene haciendo la simétrica de la función $y = f(x)$ respecto del eje de abscisas o eje OX. Las imágenes positivas pasan a ser negativas y viceversa.



Ejemplo: Representar gráficamente la función $f(x) = \frac{-1}{x}$

Se representa la hipérbola equilátera $f(x) = \frac{1}{x}$ y se hace la simétrica respecto del eje de abscisas



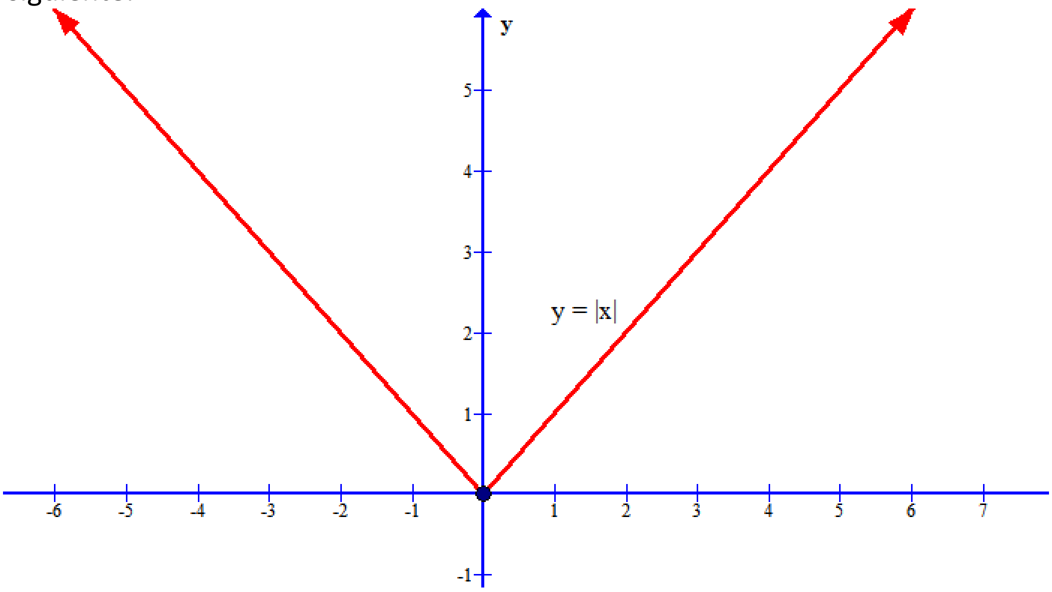
5. FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

La función valor absoluto se define por partes de la siguiente forma: $|x| = \begin{cases} -x & si \quad x<0 \\ 0 & si \quad x=0 \\ x & si \quad x>0 \end{cases}$. Es decir, es la función que toma un nº real y devuelve el nº positivo correspondiente.

Ejemplos: $|5| = 5$, $|0| = 0$, $|-7| = 7$, $\left|\frac{-6}{7}\right| = \frac{6}{7}$

Tenemos que su dominio es todo R.

Su gráfica es la siguiente:



Y como vemos su imagen es $\mathrm{Im}(|x|) = [0, +\infty)$

Está acotada inferiormente pero no superiormente, teniendo un mínimo absoluto en O(0,0).

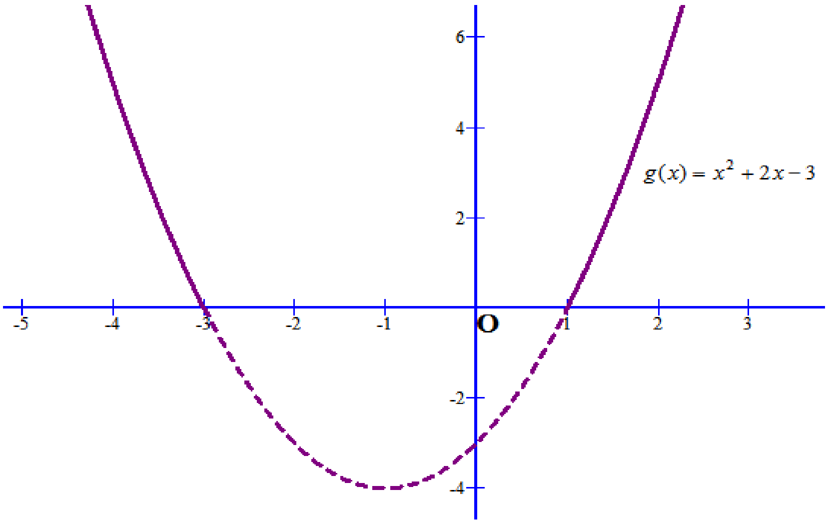
Cumple además que:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \qquad\qquad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

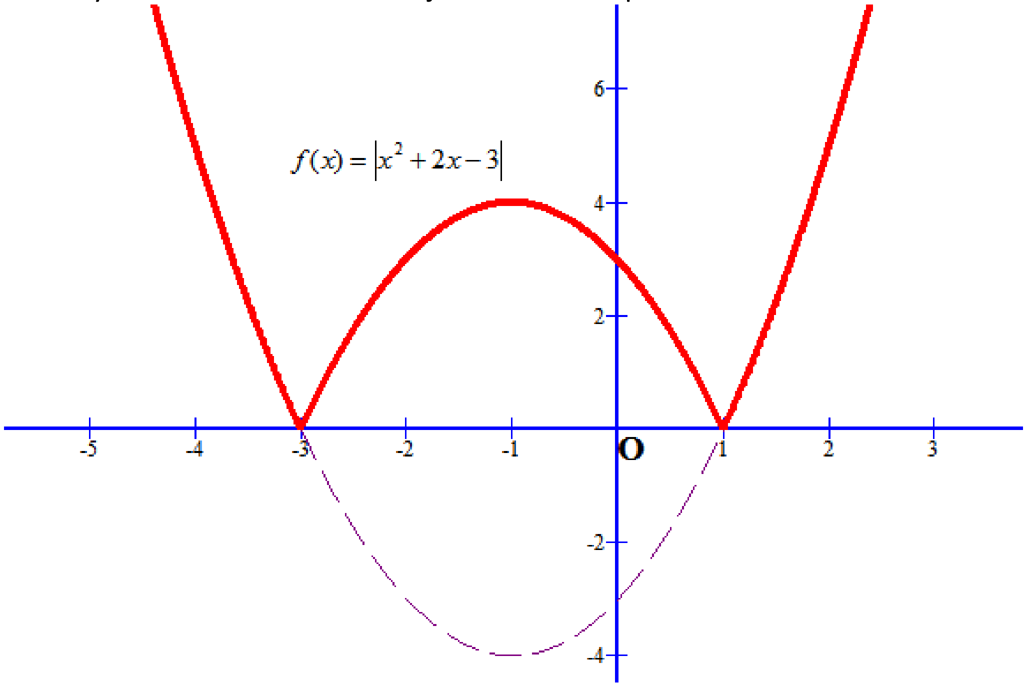
NOTA IMPORTANTE: Una vez conocido lo anterior, podemos dibujar o representar funciones de la forma $y = |f(x)|$, conociendo la gráfica de la función $y = f(x)$, simplemente transformando las imágenes negativas en positivas, como vemos en el ejemplo siguiente:

Ejemplo: Representar gráficamente la función $f(x) = |x^2 + 2x - 3|$

Para ello representamos primero la función cuadrática $g(x) = x^2 + 2x - 3$ como ya sabemos:



Y lo único que hemos de hacer ahora es la parte discontinua de la gráfica anterior (que es la negativa) convertirla en positiva y con eso tendremos dibujada la función pedida

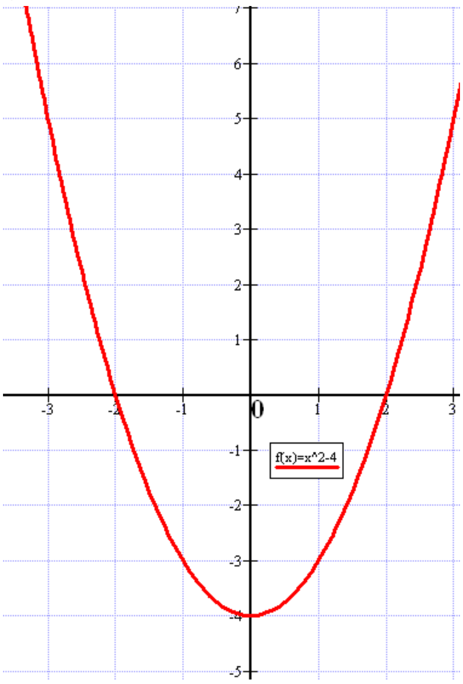


Ejemplo: Dada la función $f(x)=|x^2-4|-3$, vamos a calcular su dominio, su representación gráfica y su imagen.

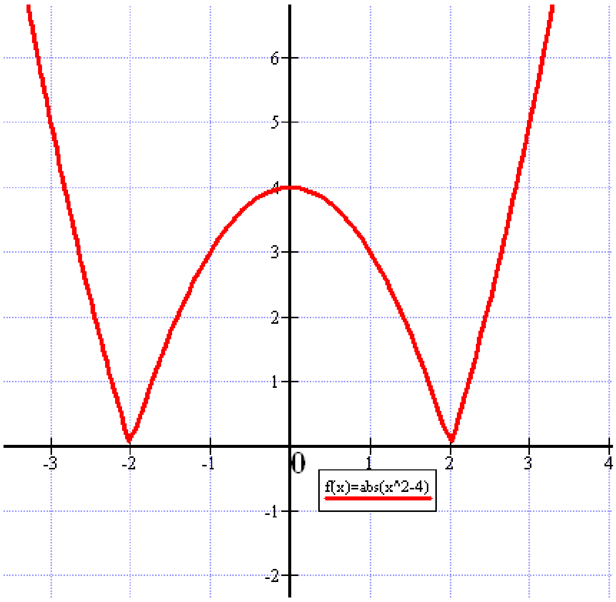
El dominio de $|g(x)|$ es igual al de $g(x)$, por lo que en nuestro caso como tenemos un polinomio cuadrático en el valor absoluto y después restamos 3, podemos concluir que $Dom(f)=R$.

Vamos a representarla gráficamente mediante 3 pasos:

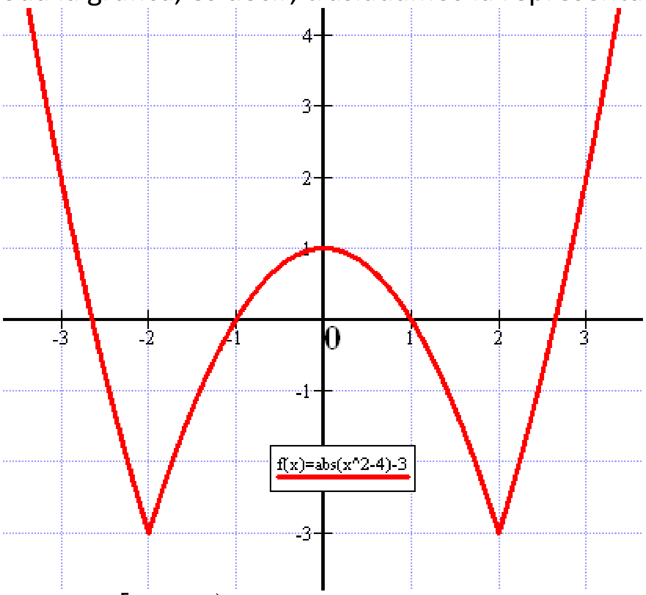
Paso1: Dibujamos la parábola $g(x)=x^2-4$, como sabemos, con curvatura, vértice, cortes, etc.



Paso 2.- El valor absoluto lo que hace es poner positivo los valores de x^2-1 que son negativos y los demás los deja igual



Paso 3.- Restamos 3 a toda la gráfica, es decir, trasladamos la representación 3 unidades hacia abajo

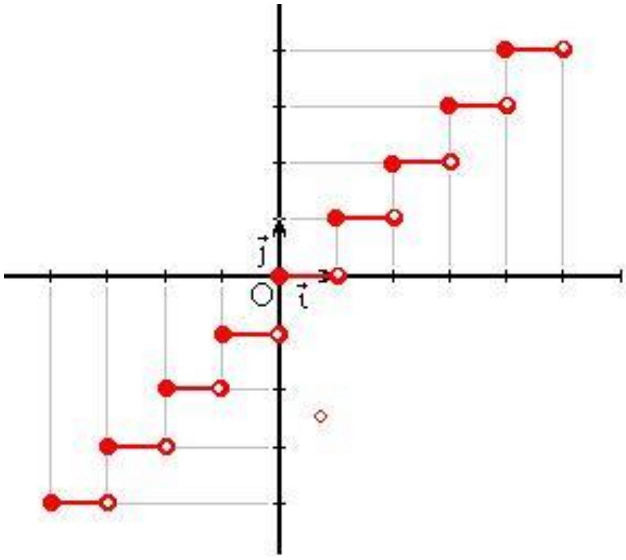


Ya podemos concluir que $\mathrm{Re}\,corr(f) = [-3, +\infty)$

6. FUNCIONES PARTE ENTERA Y PARTE DECIMAL

Función parte entera

Es la función $f(x) = E(x) =$ mayor de todos los enteros menores o iguales a x.
Su dominio es todo R.
Así, unos ejemplos de valores, E(2'3) = 2, E(0'45) = 0, E(7) = 7, E(-1'3) = -2, E(-5,2) = -6, E(-8) = -8
Su representación gráfica es parecida a una escalera:



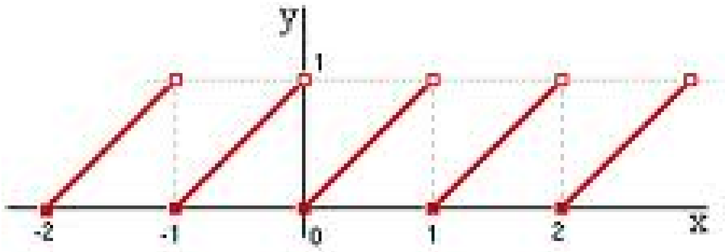
Y tenemos que Im(E(x)) = Z

Función parte decimal

Se define como Dec(x) = x - E(x).
Su dominio es todo R
Algunos ejemplos de valores:

x	2’1	8’234	5	-2	-12’34	-7’8	-9’7
Dec(x)	0’1	0’234	0	0	0’66	0’2	0’3

Su dominio es todo R y su gráfica es así:



Luego Im(Dec(x)) = [0, 1)

7. FUNCIONES DEFINIDAS POR PARTES O A TROZOS

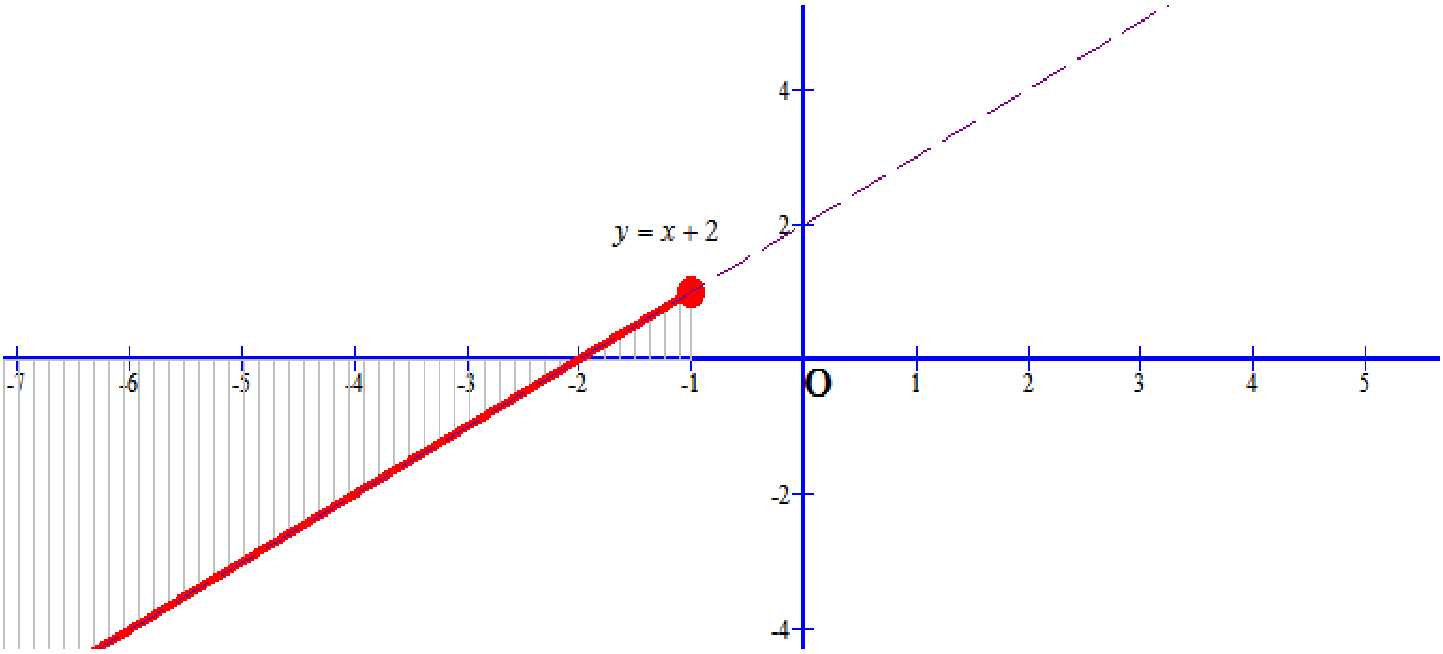
Estas funciones se caracterizan porque su criterio o fórmula varía según la variable independiente “x” pertenezca a un conjunto de valores o a otro. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo: Sea la función $f(x)=\begin{cases} x+2 & si \quad x\leq -1 \\ x^2-4x & si \quad x>0 \end{cases}$ Vamos a calcular su dominio, su representación gráfica y su recorrido

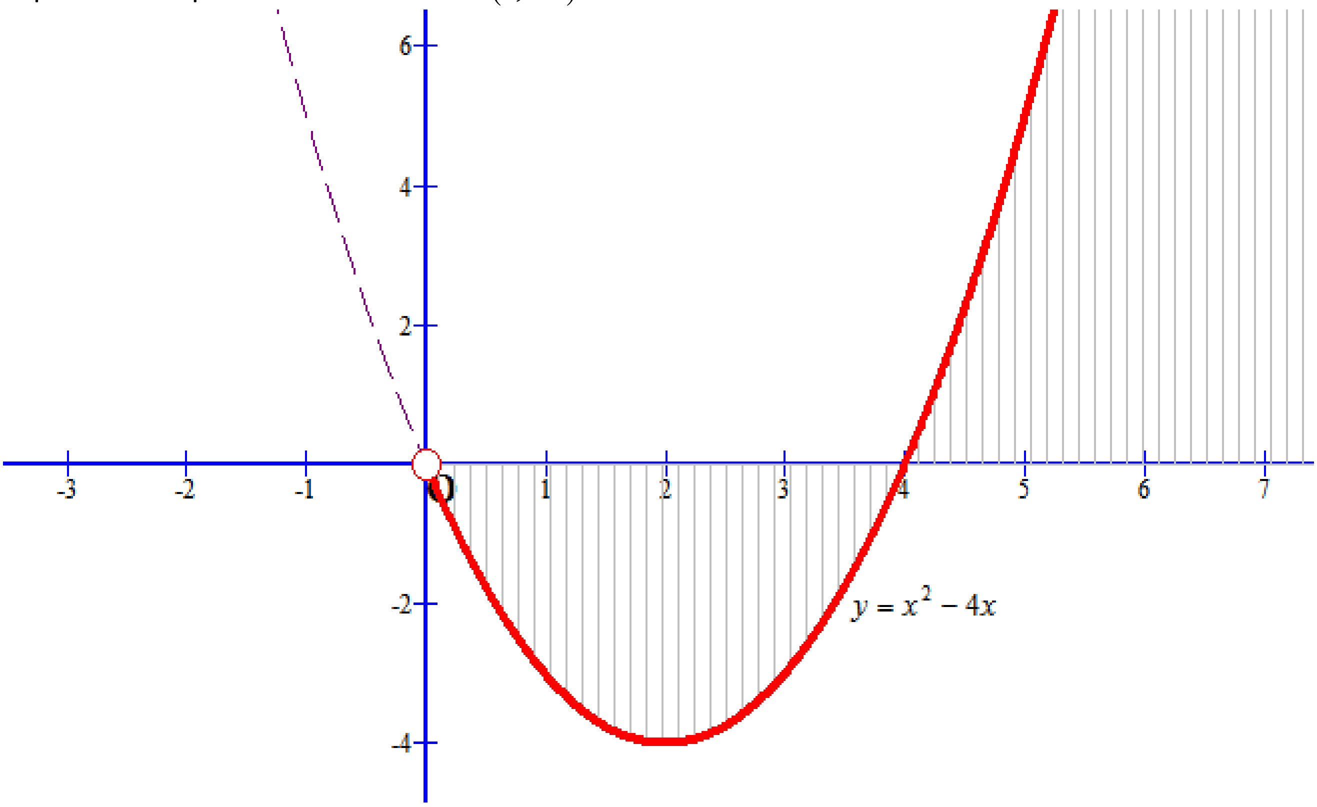
Dominio
Si $x\leq 1$, observamos que la función viene definida como una función polinómica de primer grado (afín), luego el intervalo $(-\infty,1]$ es una parte del dominio.
Si $x>0$, observamos que la función viene definida como una función polinómica de segundo grado (cuadrática), luego el intervalo $(0,+\infty)$ es una parte del dominio.
Podemos concluir que el dominio es: $Dom(f)=(-\infty,1]\cup(0,+\infty)$

Representación gráfica

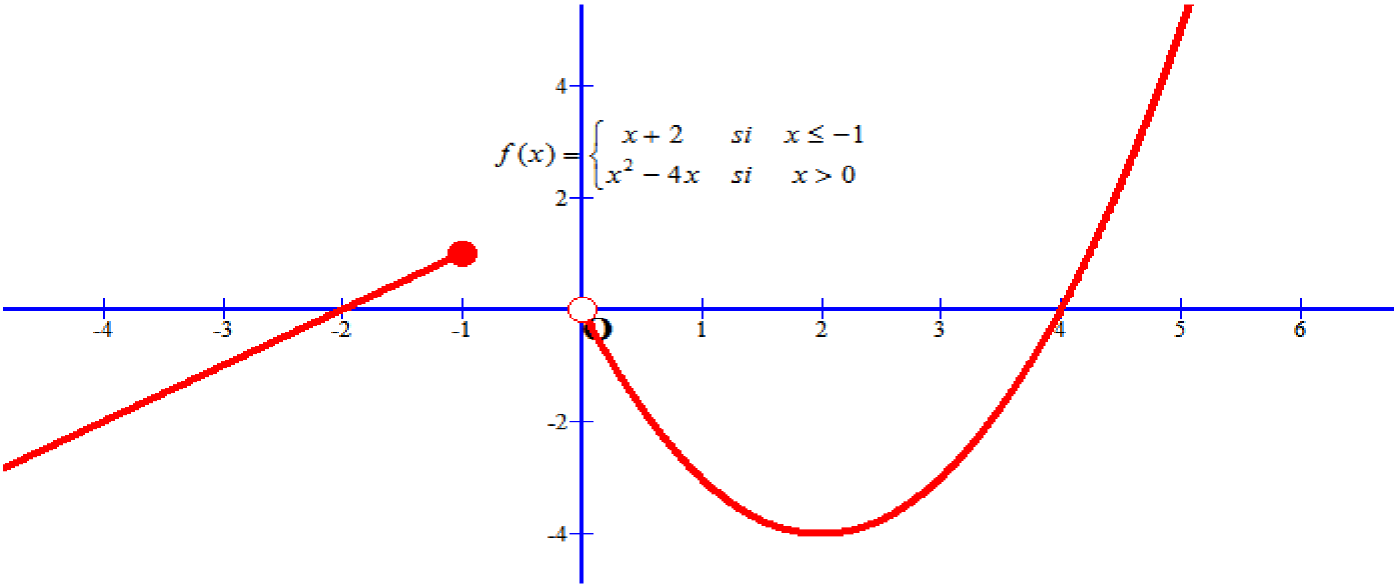
Si $x \leq 1$, observamos que la función viene definida como una función polinómica de primer grado (afín), $y = x + 2$, dibujamos por tanto la recta y nos quedamos con la parte correspondiente al intervalo $(-\infty, 1]$



Si $x > 0$, observamos que la función viene definida como una función polinómica de segundo grado (cuadrática), $y = x^2 - 4x$, dibujamos por tanto la parábola (vértice, puntos de corte, etc.) y nos quedamos con la parte correspondiente al intervalo $(0, +\infty)$.



Ahora, nos queda sólo fusionar las dos gráficas y tendremos la representación gráfica de $f(x)$



<u>Recorrido</u>

Observando la gráfica podemos decir que $\operatorname{Im}(f)=R$

Ejemplo: Sea $f(x)=\begin{cases} -2x^2+x+3 & si \quad x<1 \\ 2x-1 & si \quad 1\le x<3 \\ \ln x & si \quad x>3 \end{cases}$ Vamos a estudiar su dominio, su representación gráfica y su imagen. Esta función también se podía poner así usando intervalos $f(x)=\begin{cases} -2x^2+x+3 & si \quad x\in(-\infty,1) \\ 2x-1 & si \quad x\in[1,3) \\ \ln x & si \quad x\in(3+\infty) \end{cases}$

Podéis usar la que más os guste, es totalmente indiferente.

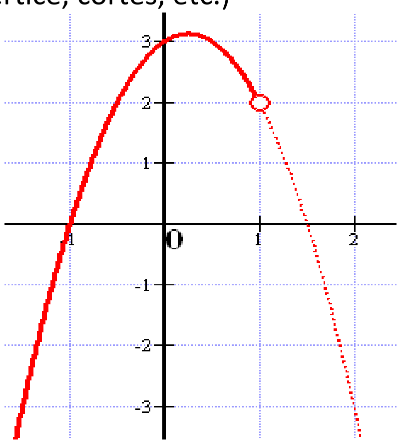
Como vemos tiene 3 partes:

- Si $x<1$ (o bien, $x\in(-\infty,1)$), está definida por un polinomio de grado 2, que siempre tiene sentido, en particular en la restricción $x<1$. Tendremos un trozo de parábola
- Si $1\le x<3$, está definida por un polinomio de grado 1 (función afín), que siempre tiene sentido, y su gráfica será una recta. Tendremos un trozo de recta (una semirrecta o un segmento)
- Si $x>3$, está definida por un logaritmo neperiano que tiene sentido siempre que su argumento (en este caso la "x") sea positivo. Como x > 3, no hay problema y tiene sentido.

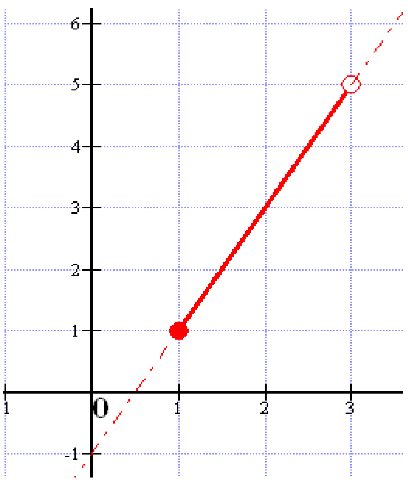
Pero hay un valor dónde la función no está definida, en x = 3. Por tanto, $Dom(f)=R-\{3\}$

Pasamos a representarla gráficamente, para ello dibujamos cada parte por separado y en línea discontinua se representa la parte que habrá que borrar en el gráfico final

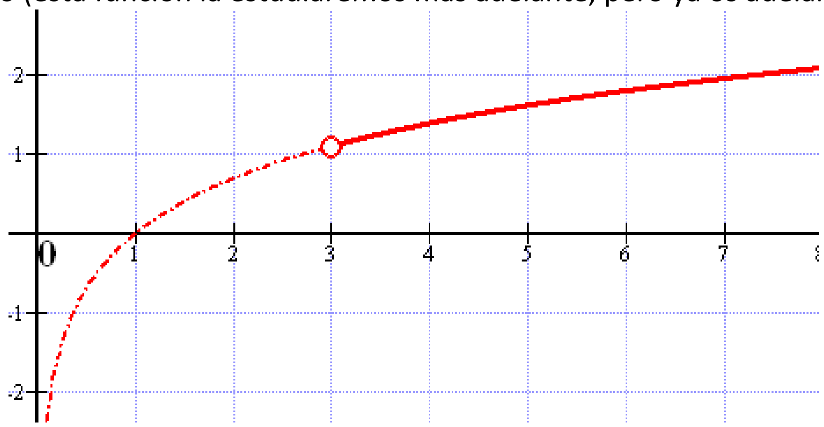
La parábola sería así (vosotros lo hacéis como siempre: vértice, cortes, etc.)



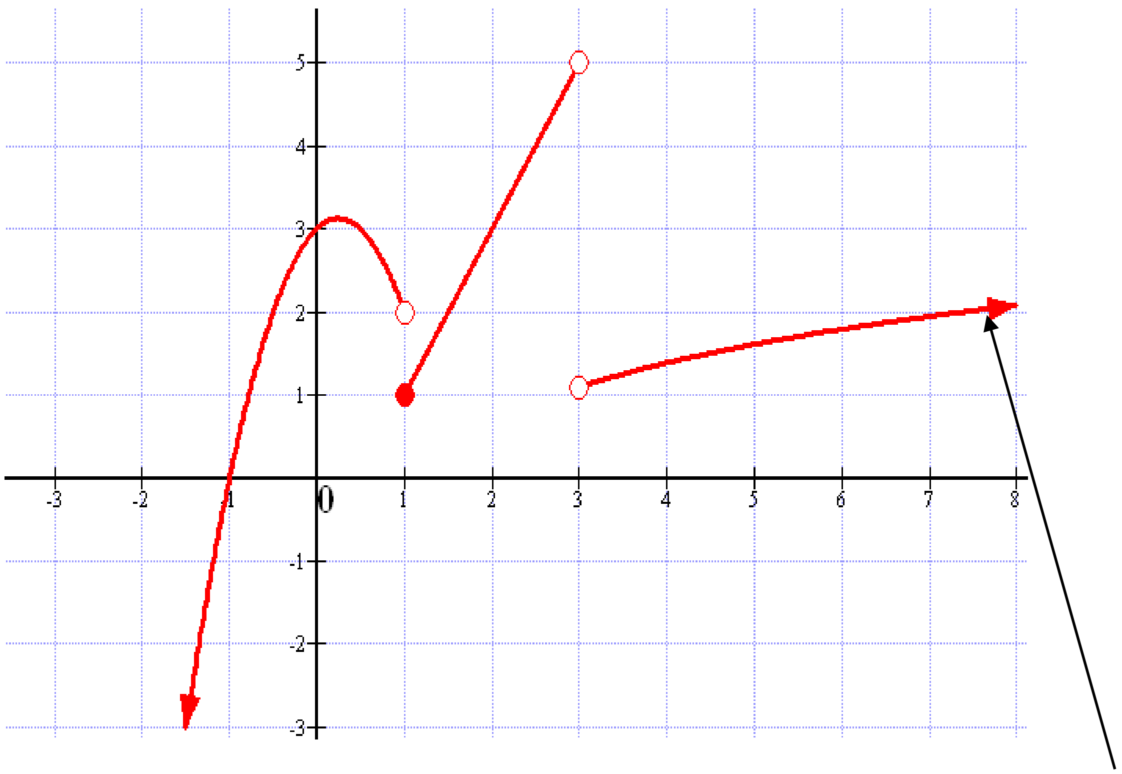
La recta



Y el logaritmo neperiano (esta función la estudiaremos más adelante, pero ya os adelanto su gráfica)



Y todo unido y quitando las líneas punteadas, nos queda la gráfica de $f(x)$



Y tenemos que $\text{Im}(f) = R$, pues el logaritmo neperiano va creciendo (aunque lentamente) hacia el infinito