UNIDAD 2.- **Polinomios** *(tema 2 del libro)*

1. OPERACIONES CON POLINOMIOS

Un **monomio** en la indeterminada x es toda expresión de la forma $a \cdot x^n$ donde a se llama coeficiente y n grado del monomio. Dos monomios se dicen **semejantes** si tiene el mismo grado

Un **polinomio** en la indeterminada x es una expresión algebraica formada por la suma o diferencia de monomios en la misma indeterminada. Se suelen notar por $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$

Se llama **término** de un polinomio a cada uno de los monomios que lo forman. Al monomio de grado cero lo llamamos término independiente.

Se llama **grado** de un polinomio al mayor de los grados de los monomios que lo forman.

Ejemplo:

El polinomio $P(x) = -3x^5 + 4x^3 - x + \frac{1}{3}$ tiene grado 5 y su término independiente es $\frac{1}{3}$

Operaciones

a) Suma y diferencia de polinomios

Para sumar o restar polinomios se suman o restan los monomios semejantes.

Ejemplo:

Dados los polinomios

$P(x) = 2x^4 - x^2 + 3$ $\quad Q(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$ $\quad R(x) = 7x^2 - 7$

Vamos a efectuar $P(x) - [Q(x) + R(x)] = (2x^4 - x^2 + 3) - [(x^3 + 2x^2 - x + 1) + (7x^2 - 7)] =$

$= (2x^4 - x^2 + 3) - (x^3 + 9x^2 - x - 6) = 2x^4 - x^3 - 10x^2 + x + 9$

b) Producto de polinomios

Para multiplicar dos polinomios se multiplican todos los monomios del primero por cada uno de los del segundo, y viceversa, y por último se reducen los términos semejantes.

Ejemplo:

Dados los polinomios

$P(x) = 2x^4 - x^2 + 3$ $\quad R(x) = 7x^2 - 7$, calcular $P(x) \cdot R(x) = (2x^4 - x^2 + 3) \cdot (7x^2 - 7) =$

$14x^6 - 14x^4 - 7x^4 + 7x^2 + 21x^2 - 21 = 14x^6 - 21x^4 + 28x^2 - 21$

Ejemplo:

Dado el polinomio $P(x) = 3x^2 - 2$, calcular $[P(x)]^2$

$[P(x)]^2 = (3x^2 - 2)^2 = (3x^2)^2 - 2 \cdot 3x^2 \cdot 2 + 2^2 = 9x^4 - 12x^2 + 4$

2. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Veamos con un ejemplo como se realiza la división de dos polinomios.

Sean $P(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 + 3$ y $Q(x) = -x^2 + 7$, vamos a efectuar la división $P(x) : Q(x)$ ó $\frac{P(x)}{Q(x)}$

A $P(x)$ se le llama polinomio dividendo y a $Q(x)$ se le llama polinomio divisor

Hay que seguir estos pasos para dividir polinomios:

- Para poder dividir polinomios el grado del polinomio dividendo(en este caso 4) ha de ser mayor que el del polinomio divisor(en este caso 2)

- Se ordenan los polinomios dividendo y divisor de mayor a menor grado. Si el dividendo estuviera incompleto, dejamos huecos o espacios en blanco correspondientes a los términos que faltan.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2x^4 & +x^3 & -x^2 & & +3 & -x^2+7 \\ \cline{6-6} \end{array}$$

- Hacemos la división o cociente entre el primer término del dividendo y el primer término del divisor. En este ejemplo, $\dfrac{2x^4}{-x^2} = -2x^2$. Éste será el primer término del cociente

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2x^4 & +x^3 & -x^2 & & +3 & -x^2+7 \\ \cline{6-6} & & & & & -2x^2 \end{array}$$

- El cociente obtenido lo multiplicamos por el divisor y los pasamos con signo opuesto o cambiado debajo de los términos del polinomio dividendo

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2x^4 & +x^3 & -x^2 & & +3 & -x^2+7 \\ \cline{6-6} -2x^4 & & +14x^2 & & & -2x^2 \end{array}$$

- Sumamos los polinomios de la parte del dividendo, y vemos que siempre el de mayor grado se cancela

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2x^4 & +x^3 & -x^2 & & +3 & -x^2+7 \\ \cline{6-6} -2x^4 & & +14x^2 & & & -2x^2 \\ \cline{1-5} 0 & +x^3 & +13x^2 & & +3 & \end{array}$$

- Con el polinomio resultante, volvemos a realizar el mismo proceso, es decir, dividimos el de mayor grado del nuevo $+x^3$ entre el de mayor grado del divisor $-x^2$, $\dfrac{x^3}{-x^2} = -x$, que será el nuevo término del polinomio cociente

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2x^4 & +x^3 & -x^2 & & +3 & -x^2+7 \\ \cline{6-6} -2x^4 & & +14x^2 & & & -2x^2-x \\ \cline{1-5} 0 & +x^3 & +13x^2 & & +3 & \end{array}$$

- Volvemos a multiplicar, en este paso $-x$ por el divisor y lo pasamos al otro lado con signo cambiado y sumamos

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2x^4 & +x^3 & -x^2 & & +3 & -x^2+7 \\ \cline{6-6} -2x^4 & & +14x^2 & & & -2x^2-x \\ \cline{1-5} 0 & +x^3 & +13x^2 & & +3 & \\ & -x^3 & & +7x & & \\ \cline{2-5} & 0 & +13x^2 & +7x & +3 & \end{array}$$

- Hacemos lo mismo, repetidamente hasta que el grado del polinomio dividendo resultante sea menor que el grado del polinomio divisor. Todavía hay que hacerlo una vez más, en este paso $\dfrac{13x^2}{-x} = -13$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2x^4 & +x^3 & -x^2 & & +3 & -x^2+7 \\ \cline{6-6} -2x^4 & & +14x^2 & & & -2x^2-x-13 \\ \cline{1-5} 0 & +x^3 & +13x^2 & & +3 & \\ & -x^3 & & +7x & & \\ \cline{2-5} & 0 & +13x^2 & +7x & +3 & \\ & & -13x^2 & & +91 & \\ \cline{3-5} & & 0 & +7x & +94 & \end{array}$$

- Con esto ya tenemos hecha la división donde el polinomio cociente es $C(x) = -2x^2 - x - 13$ y el polinomio resto es $R(x) = 7x + 94$. Si nos fijamos vemos que el polinomio resto siempre ha de tener menor grado que el polinomio divisor.
- Por último, si queremos podemos realizar la comprobación efectuando

dividendo = **divisor** x **cociente** + **resto**

que en este ejemplo sería hacer $(-x^2+7)\cdot(-2x^2-x-13) + (7x+94)$ y ver que el resultado es $P(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 + 3$

Ejemplo:

Efectuar la división $(3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x + 12) : (x^2 - 3x + 5)$

Solución: Cociente: $C(x) = 3x^2 + 5x + 5$ Resto: $R(x) = -12x - 13$

3. REGLA DE RUFFINI

Esta regla se aplica cuando el divisor es un polinomio de la forma ($x - a$). Veamos con un ejemplo como se procede:

Vamos a dividir el polinomio ($2x^3 - 3x^2 + 5$) entre el polinomio $(x - 2)$

- Ponemos los coeficientes del polinomio dividendo en orden de mayor a menos grado y el término independiente del divisor cambiado de signo de la siguiente forma

	2	-3	0	5
2				

- Bajamos el primer término del dividendo y lo multiplicamos por el término independiente. Lo ponemos debajo del siguiente término del polinomio dividendo

	2	-3	0	5
2		4		
	2			

- Sumamos

	2	-3	0	5
2		4		
	2	1		

- Volvemos a operar de manera similar

	2	-3	0	5
2		4	2	
	2	1	2	

- Continuamos hasta el final de igual manera

	2	-3	0	5
2		4	2	4
	2	1	2	9

- El último número es el resto de la división
- Los otros números son los coeficientes del polinomio dividendo, que es de un grado menos que el grado del polinomio dividendo

	2	-3	0	5
2		4	2	4
	2	1	2	9

- Por tanto tenemos que Cociente: $C(x) = 2x^2 + x + 2$ Resto: $R(x) = 9$

Ejemplo:

Dividir por Ruffini $(3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 12) : (x + 1)$

	3	-4	5	-2	-12
-1		-3	7	-12	14
	3	-7	12	-14	2

Por tanto tenemos que Cociente: $C(x) = 3x^3 - 7x^2 + 12x - 14$ Resto: $R(x) = 2$

4. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN POLINOMIO

Para descomponer un polinomio en factores, es decir, como producto de polinomios de menor grado, se han de seguir diferentes métodos que nos permitirán realizarlo:

- Sacar factor común:

Ejemplo: Extraemos factores comunes del polinomio $P(x) = 12x^4 + 4x^3 - 80x^2 = 4x^2 \cdot (3x^2 + x - 20)$

Ejemplo: Extraemos factores del polinomio $P(x) = (x+3)^3 - 2(x+3)^2 = (x+3)^2 \cdot [(x+3)-2] = (x+3)^2 \cdot (x+1)$

- Usar las igualdades notables:

Recordemos las igualdades notables, que son:

$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2$
$a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2$
$a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$

Teniendo en cuenta lo anterior, lo aplicamos a los siguientes ejemplos:

Ejemplo: $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$

Ejemplo: $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 \Rightarrow x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$

Ejemplo: $x^2 - 16 = (x-4) \cdot (x+4)$

Ejemplo: $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 1 + 1^2 \Rightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = [(x-1) \cdot (x+1)]^2 \Rightarrow$
$x^4 - 2x^2 + 1 = (x-1)^2 \cdot (x+1)^2$

Ejemplo: $x^4 - 16 = (x^2 - 4) \cdot (x^2 + 4) = (x-2) \cdot (x+2) \cdot (x^2 + 4)$

- Usar Ruffini:

Llamamos raíz de un polinomio $P(x)$ a cada uno de los números a para los cuales el valor numérico del polinomio es cero, es decir, a es raíz del polinomio $P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0$. En estos casos, el polinomio $(x-a)$ es un factor del polinomio $P(x)$

Las raíces enteras de un polinomio son divisores del término independiente siempre que este no sea nulo.

Ejemplo: Vamos a descomponer por Ruffini el polinomio $P(x) = 3x^3 + 6x^2 - 3x - 6$. Las posibles raíces enteras son los divisores del término independiente, -6. Por tanto debemos probar con ± 1, ± 2, ± 3 y ± 6.
Empezamos y vamos probando, aquí sólo ponemos las que nos interesan, dan de resto 0

	3	6	-3	-6
1		3	9	6
	3	9	6	0
-1		-3	-6	
	3	6	0	
-2		-6		
	3	0		

Con lo cual nos queda, $P(x) = 3x^3 + 6x^2 - 3x - 6 = 3 \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x+2)$

Ejemplo: Vamos a descomponer por Ruffini el polinomio $P(x) = 2x^2 - 9x + 9$. Las posibles raíces enteras son los divisores del término independiente, +9. Por tanto debemos probar con ± 1, ± 3, ± 9

	2	-9	9
3		6	-9
	2	-3	0
$\frac{3}{2}$		3	
	2	0	

La raíz racional $\frac{3}{2}$ la hemos obtenido dividiendo -3 entre 2 y cambiándole el signo. Esta regla sirve siempre para la última de las raíces. Por tanto nos queda que, $P(x) = 2x^2 - 9x + 9 = 2\cdot(x-3)\cdot\left(x - \frac{3}{2}\right)$

5. MCD Y MCM DE POLINOMIOS

El máximo común divisor de varios polinomios, MCD, se obtiene con los factores comunes a los polinomios con su menor exponente. Si no hubiera ninguno, el MCD es 1, es decir son primos entre sí.
El mínimo común múltiplo de varios polinomios, MCM, se obtiene tomando los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.
Ejemplo: Vamos a calcular el MCD y MCM de los polinomios $P(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$ y $Q(x) = 2x^4 - 12x^3 - 46x^2 + 120x - 64$
Descomponemos por Ruffini cada uno de ellos

	1	-9	24	-16
1		1	-8	16
	1	-8	16	0
4		4	-16	
	1	-4	0	
4		4		
	1	0		

Así, $P(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16 = (x-1)\cdot(x-4)^2$

	2	-12	-46	120	-64
1		2	-10	-56	64
	2	-10	-56	64	0
1		2	-8	-64	
	2	-8	-64	0	
-4		-8	64		
	2	-16	0		
8		16			
	2	0			

Así, $Q(x) = 2x^4 - 12x^3 - 46x^2 + 120x - 64 = 2\cdot(x-1)^2\cdot(x+4)\cdot(x-8)$
Por tanto,

$$MCD(P(x), Q(x)) = (x-1)$$
$$MCM(P(x), Q(x)) = 2\cdot(x-1)^2\cdot(x-4)^2\cdot(x+4)\cdot(x-8)$$

6. FRACCIONES ALGEBRAICAS. OPERACIONES

Una **fracción algebraica** es el cociente de dos polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$, como por ejemplo $\frac{x-1}{2x+3}$ ó $\frac{1}{x}$

Análogamente a las fracciones numéricas, si multiplicamos o dividimos el numerador y el denominador de una fracción algebraica por un mismo polinomio, obtenemos una fracción equivalente a la dada. Esto nos permite simplificar o complicar una fracción algebraica
Ejemplos:

a) $\frac{x^2-10x+25}{x^2-5x}$ = (descomponemos en factores numerador y denominador) $\frac{(x-5)^2}{x\cdot(x-5)}=\frac{x-5}{x}$ Esto es lo que se llama **simplificar**

b) $\frac{1-x}{x}=$(multiplicamos por el mismo polinomio en numerador y denominador) $\frac{(1-x)\cdot(1+x)}{x\cdot(1+x)}=\frac{1-x^2}{x+x^2}$

- Suma de fracciones algebraicas

Se opera de forma análoga a la suma de fracciones numéricas.
Ejemplo: Efectuar

a) $\frac{1-x}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2+1}+\frac{2}{x^2+1}=\frac{1-x-2x+2}{x^2+1}=\frac{-3x+3}{x^2+1}$

b) $\frac{2}{x^2-4}-\frac{3x+1}{x-2}=$

Calculamos el MCM de los denominadores, $\left.\begin{array}{r} x^2-4=(x-2)\cdot(x+2) \\ x-2=x-2 \end{array}\right\} \Rightarrow MCM=(x-2)\cdot(x+2)$ que es el denominador común. Ahora hacemos igual que con las fracciones, dividimos el denominador común (MCM) por el denominador antiguo y el resultado lo multiplicamos por el numerador correspondiente. Así nos queda,

$$\frac{2}{x^2-4}-\frac{3x+1}{x-2}=\frac{2\cdot 1}{(x-2)\cdot(x+2)}-\frac{(3x+1)\cdot(x+2)}{(x-2)\cdot(x+2)}=\frac{2-(3x+1)\cdot(x+2)}{(x-2)\cdot(x+2)}=\frac{2-(3x^2+6x+x+2)}{(x-2)\cdot(x+2)}=$$

$$\frac{-3x^2-7x}{(x-2)\cdot(x+2)}=\frac{-3x^2-7x}{x^2-4}=$$

- Producto y potencia de fracciones algebraicas

Se opera de forma análoga a las fracciones numéricas
Ejemplo: Efectuar

a) $\frac{2}{x^2-4}\cdot\frac{x^2-2x}{x-1}=\frac{2\cdot(x^2-2x)}{(x^2-4)\cdot(x-1)}=$ (ahora factorizamos por si se pudiera simplificar)

$=\frac{2\cdot x(x-2)}{(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x-1)}=$(simplificamos) $\frac{2\cdot x}{(x+2)\cdot(x-1)}=\frac{2\cdot x}{x^2+x-2}$

b) $x+\frac{x-1}{x}\cdot\frac{1}{x^2-1}=x+\frac{x-1}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=$(simplificamos) $x+\frac{1}{x\cdot(x+1)}=$ (ahora sumamos poniendo denominador común)= $\frac{x\cdot x\cdot(x+1)+1}{x\cdot(x+1)}=\frac{x^2\cdot(x+1)+1}{x\cdot(x+1)}=\frac{x^3+x^2+1}{x\cdot(x+1)}$

- Cociente de fracciones algebraicas

Se opera de forma análoga a las fracciones numéricas

Ejemplo: Efectuar

a) $\frac{x}{x^2-4} : \frac{-3}{x+2} =$ (multiplicamos en cruz)= $\frac{x\cdot(x+2)}{-3\cdot(x^2-4)} =$(factorizamos para ver si se puede simplificar)

$= \frac{x\cdot(x+2)}{-3\cdot(x-2)\cdot(x+2)} = \frac{-x}{3\cdot(x-2)}$

b) $\frac{x^2-6x+9}{x} : \frac{x^2-9}{x+3} = \frac{(x^2-6x+9)\cdot(x+3)}{x\cdot(x^2-9)} =$ (descomponemos en factores) $\frac{(x-3)^2\cdot(x+3)}{x\cdot(x-3)\cdot(x+3)} = \frac{x-3}{x\cdot}$

Ejemplos:

a) $\frac{x^2+x}{x^2+1}\cdot\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{x^2+x}{x^2+1}\cdot\left(\frac{x(x+1)-1\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)}\right) = \frac{x^2+x}{x^2+1}\cdot\left(\frac{x^2+x-x+1}{(x-1)\cdot(x+1)}\right) = \frac{x^2+x}{x^2+1}\cdot\left(\frac{x^2+1}{(x-1)\cdot(x+1)}\right) =$

$\frac{(x^2+x)\cdot(x^2+1)}{(x^2+1)\cdot(x-1)\cdot(x+1)} =$(descomponemos y simplificamos) $\frac{x\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)}{(x^2+1)\cdot(x-1)\cdot(x+1)} = \frac{x}{x-1}$

b) $\frac{x+\frac{x}{x-1}}{x-\frac{x}{x-1}} = \frac{\frac{x\cdot(x-1)+x}{x-1}}{\frac{x\cdot(x-1)-x}{x-1}} = \frac{\frac{x^2}{x-1}}{\frac{x^2-2x}{x-1}} = \frac{x^2}{x-1} : \frac{x^2-2x}{x-1} = \frac{x^2\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x^2-2x)} = \frac{x^2}{(x^2-2x)} = \frac{x^2}{x\cdot(x-2)} = \frac{x}{x-2}$

c) $2 - \frac{2}{x^2-3x+2} + \frac{1}{x^2-4x+3} =$

Descomponemos en factores los denominadores y calculamos el común denominador:

$$\left.\begin{array}{r} 1=1 \\ x^2-3x+2=(x-1)\cdot(x-2) \\ x^2-4x+3=(x-1)\cdot(x-3) \end{array}\right\} \Rightarrow MCM = (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$$ Y así tenemos que:

$$2 - \frac{2}{(x-1)\cdot(x-2)} + \frac{1}{(x-1)\cdot(x-3)} = + \frac{2\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3) - 2\cdot(x-3) + 1\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)} = \frac{2x^3-12x^2+10x-7}{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)}$$