UNIDAD 5.- **LOGARITMOS. APLICACIONES** *(tema 5 del libro)*

1. LOGARITMO DE UN NÚMERO

Consideremos la ecuación: $2^x = 8$.
Como vemos la incógnita está en el exponente, lo que la hace diferente a todos los tipos vistos hasta ahora. "x" es el exponente al que tenemos que elevar 2 para que de cómo resultado 8.
En matemáticas diremos que "x" es el logaritmo en base 2 de 8

En este ejemplo es fácil ver que x = 3 pues $2^3 = 8$

Definición: Llamamos *logaritmo* en base un nº real "***a***"(positivo y distinto de 1) de un nº real "***b***" (positivo) como el exponente al que tenemos que elevar "***a***" para que de cómo resultado "***b***".

Matemáticamente se representa así: $\log_a b = z \Leftrightarrow a^z = b$

Veamos ejemplos para entenderlo mejor:
Ejemplos:

a) $\log_2 16 = z \Leftrightarrow 2^z = 16 \Leftrightarrow 2^z = 2^4 \Leftrightarrow z = 4$ Por tanto concluimos que $\log_2 16 = 4$	d) $\log_2 \sqrt{2} = z \Leftrightarrow 2^z = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2^z = 2^{\frac{1}{2}}$ $\Leftrightarrow z = \frac{1}{2}$ Por tanto concluimos que $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$
b) $\log_3 243 = z \Leftrightarrow 3^z = 243 \Leftrightarrow 3^z = 3^5$ $\Leftrightarrow z = 5$ Por tanto concluimos que $\log_3 243 = 5$	e) $\log_3 \left(\frac{1}{9}\right) = z \Leftrightarrow 3^z = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^z = 3^{-2}$ $\Leftrightarrow z = -2$ Por tanto concluimos que $\log_3 \left(\frac{1}{9}\right) = -2$
c) $\log_{10} 100 = z \Leftrightarrow 10^z = 100 \Leftrightarrow 10^z = 10^2$ $\Leftrightarrow z = 2$ Por tanto concluimos que $\log_{10} 100 = 2$	f) $\log_7 1 = z \Leftrightarrow 7^z = 1 \Leftrightarrow 3^z = 7^0 \Leftrightarrow z = 0$ Por tanto concluimos que $\log_7 1 = 0$

Propiedades inmediatas de los logaritmos:

- El logaritmo en cualquier base del nº 1 es 0

  $\log_a 1 = 0$ pues $a^0 = 1$
- El logaritmo en cualquier base de la base es 1

  $\log_a a = 1$ pues $a^1 = a$
- El logaritmo en cualquier base de un nº que sea una potencia de la base es el exponente de dicha potencia

  $\log_a a^p = p$ que resulta evidente
- Sólo tienen logaritmos los números positivos, pues como sabemos el resultado de una potencia siempre es positivo. No tiene sentido, por ejemplo, $\log_2(-4)$, no existe

Logaritmos decimales

Se llaman logaritmos decimales a aquellos cuya base es 10. También se les conoce como vulgares y en su representación no se pone la base 10, por tanto se notan $\log x$

Ejemplos:

a) $\log 100 = 2$

b) $\log \sqrt[4]{1000000} = \log 10^{\frac{6}{4}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

c) $\log 0'0001 = \log 10^{-4} = -4$

Estos logaritmos se pueden obtener con la calculadora, usando la tecla LOG que aparece en ella

Ejemplos:

a) $\log 3 = 0'4777121...$

b) $\log 254 = 2'404833....$

c) $\log \sqrt{805} = 1'452897...$

d) $\log(-100) = Error$ No existes logaritmos de números negativos

Logaritmos neperianos

El nº irracional *e* = 2´71828182… se usa muy a menudo como base de logaritmos.
Se llaman logaritmos neperianos a aquellos cuya base es *e*. También se les conoce como naturales y su representación es $\ln x$ ó $L\,x$
Habitualmente habrá que obtenerlos mediante la calculadora usando la tecla correspondiente ln ó L según el modelo de calculadora.

Ejemplos:

a) $\ln 3 = 1'098612...$

b) $L\sqrt{e} = L\,e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

c) $\ln 179'28 = 5'188948...$

2. PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

a) *El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores*

$$\log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$$

Ejemplo: Obtener sin calculadora

$$\log_6 4 + \log_6 9 = \log_6(4 \cdot 9) = \log_6 36 = 2$$

Ejemplo: Sabiendo que $\log_5 x = 3'4$ obtener sin calculadora $\log_5 5x$

Como $\log_5 5x = \log_5 5 + \log_5 x = 1 + 3'4 = 4'4$

b) *El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo y del divisor*

$$\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$$

Ejemplo: Obtener sin calculadora

$$\log_2 6 - \log_2 48 = \log_2\left(\frac{6}{48}\right) = \log_2\left(\frac{1}{8}\right) = \log_2 2^{-3} = -3$$

c) *El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base*

$$\log_a m^n = n \cdot \log_a m$$

Ejemplo: Calcular

$$\ln\left(\frac{e}{\sqrt[5]{e^2}}\right) = \ln\left(\frac{e}{e^{\frac{2}{5}}}\right) = \ln e^{\left(1-\frac{2}{5}\right)} = \ln e^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}\cdot \ln e = \frac{3}{5}\cdot 1 = \frac{3}{5}$$

d) *El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz*

$$\log_a \sqrt[n]{m} = \frac{\log_a m}{n}$$

Ejemplo: Calcular

$$\log \sqrt[6]{12} = \frac{\log 12}{6} = 0'179863...$$

e) *Relación entre logaritmos de distintas bases*

El logaritmo en base *a* de un número se puede transformar en el logaritmo de otra base *b* cualquiera mediante la expresión:

$$\log_a m = \frac{\log_b m}{\log_b a}$$

Ejemplo: Obtén con la calculadora de dos formas distintas $\log_{11} 29$:

Pasando a logaritmo decimal: $\log_{11} 29 = \frac{\log 29}{\log 11} = \frac{1'4623...}{1'01413...} = 1'40427...$

Pasando a logaritmo neperiano: $\log_{11} 29 = \frac{\ln 29}{\ln 11} = \frac{3'3672...}{2'3978...} = 1'40427...$

3. ECUACIONES EXPONENCIALES

Una ecuación es **exponencial** cuando la incógnita aparece en el exponente de una potencia
Como ejemplos son ecuaciones exponenciales las siguientes.

$3^{2x-1} = 1$; $\qquad 2^x - 2^{x+1} = -2$

No hay un procedimiento general para resolver este tipo de ecuaciones, sólo con la práctica aprenderemos a resolverlas.

Ejemplo: Resuelve

$$4\cdot 3^{2x-1} = 36 \Rightarrow 3^{2x-1} = \frac{36}{4} \Rightarrow 3^{2x-1} = 9 \Rightarrow 3^{2x-1} = 3^2 \Rightarrow$$ (igualamos exponentes)

$$2x - 1 = 2 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Ejemplo: Resuelve

$5^x = 12$ Si nos fijamos x es el exponente al cual tenemos que elevar 5 para que de 12, es decir, x es el logaritmo en base 5 de 12 $\Rightarrow x = \log_5 12 \Rightarrow$ Hacemos un cambio a base decimal para poder usar la calculadora $x = \dfrac{\log 12}{\log 5} \Rightarrow x = 1'54396$

De forma general, si tenemos una ecuación exponencial del tipo $a^x = m \Rightarrow x = \log_a m$ por la propia definición de logaritmo.

Ejemplo: Resuelve

$3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 13 \Rightarrow$ Transformamos la ecuación para que 3^x aparezca sólo

$3^x + \dfrac{3^x}{3} + \dfrac{3^x}{3^2} = 13 \Rightarrow 3^x + \dfrac{3^x}{3} + \dfrac{3^x}{9} = 13$ Ahora hacemos lo que se llama un cambio de variable

$\boxed{z = 3^x}$ Con lo cual sustituyendo en la ecuación nos queda otra más fácil de resolver $z + \dfrac{z}{3} + \dfrac{z}{9} = 13 \Rightarrow$

Hacemos común denominador y operamos $\dfrac{9z + 3z + z}{9} = \dfrac{117}{9} \Rightarrow 13z = 117 \Rightarrow z = 9$

Por último deshacemos el cambio y resolvemos: $z = 3^x \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

Ejemplo: Resuelve

$4^x = 2^{x+2} + 32 \Rightarrow$ Transformamos la ecuación para que 2^x aparezca sólo, nos queda:

$\left(2^2\right)^x = 2^{x+2} + 32 \Rightarrow \left(2^x\right)^2 = 2^x \cdot 2^2 + 32 \Rightarrow$ Hacemos el cambio $\boxed{z = 2^x}$ y sustituyendo nos queda:

$z^2 = z \cdot 4 + 32 \Rightarrow z^2 - 4z - 32 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{4 \pm 12}{2} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 8 \\ z_2 = -4 \end{cases}$ Deshacemos los cambios para cada solución

- Si $z_1 = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow \boxed{x = 3}$ es una solución de la ecuación exponencial
- Si $z_1 = -4 \Rightarrow 2^x = -4 \Rightarrow x = \log_2(-4)$, que como sabemos no existe pues no hay logaritmos de números negativos o cero

4. SISTEMAS DE ECUACIONES EXPONENCIALES

Un sistema de ecuaciones es exponencial si al menos una de sus ecuaciones es exponencial.
No existen métodos fijos de resolución, la práctica nos aportará la experiencia para resolverlos.

Ejemplo: Resuelve $\begin{cases} 2^x \cdot 2^{2y} = 32 \\ \dfrac{2^{3x}}{2^{5y}} = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{x+2y} = 2^5 \\ 2^{3x-5y} = 2^4 \end{cases} \Rightarrow$ (igualamos exponentes) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases} \Rightarrow$ Se resuelve por el método que queramos y la solución es $\boxed{\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}}$

Ejemplo: Resuelve $\begin{cases} 3\cdot 5^x + 2\cdot 6^{y+1} = 807 \\ 15\cdot 5^{x-1} - 6^y = 339 \end{cases}$

Operamos para dejar preparado el sistema sólo con 5^x y $6^y \Rightarrow \begin{cases} 3\cdot 5^x + 2\cdot 6^y\cdot 6 = 807 \\ 15\cdot 5^x\cdot 5^{-1} - 6^y = 339 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 3\cdot 5^x + 12\cdot 6^y = 807 \\ 15\cdot 5^x\cdot \frac{1}{5} - 6^y = 339 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\cdot 5^x + 12\cdot 6^y = 807 \\ 3\cdot 5^x - 6^y = 339 \end{cases}$ Hacemos ahora un cambio de variables o incógnitas: $\Rightarrow \begin{cases} 5^x = z \\ 6^y = t \end{cases}$ y sustituimos, quedándonos el sistema como $\Rightarrow \begin{cases} 3z + 12t = 807 \\ 3z - t = 339 \end{cases}$ Resolvemos por Gauss (E_2-E_1) $\Rightarrow \begin{cases} 3z + 12t = 807 \\ -13t = -468 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3z + 12t = 807 \\ t = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 125 \\ t = 36 \end{cases}$ Por último deshacemos el cambio y resolvemos: $\Rightarrow \begin{cases} 5^x = z \\ 6^y = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^x = 125 \\ 6^y = 36 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}}$

5. ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Una ecuación es **logarítmica** cuando la incógnita aparece afectada por un logaritmo.
Para resolverlas tampoco hay un método fijo, pero principalmente usaremos:

- La definición de logaritmo: $\log_a m = z \Leftrightarrow a^z = m$
- Igualdad de logaritmos: $\log_a m = \log_a p \Leftrightarrow m = p$
- Propiedades de los logaritmos

Ejemplo: Resuelve $2\log x - \log(x-16) = 2$

Aplicando las propiedades de los logaritmos, $\log x^2 - \log(x-16) = 2 \Rightarrow \log\left(\frac{x^2}{x-16}\right) = 2 \Rightarrow$

Aplicamos la definición de logaritmo $\frac{x^2}{x-16} = 10^2 \Rightarrow x^2 = 100(x-16) \Rightarrow$

$$x^2 - 100x + 1600 = 0 \Rightarrow x = \frac{100 \pm 60}{2} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x_1 = 80 \\ x_2 = 20 \end{cases}}$$

Ejemplo: Resuelve $\ln(x+1) = \ln(5x-13) - \ln(x-3) \Rightarrow \ln(x+1) = \ln\left(\frac{5x-13}{x-3}\right) \Rightarrow$ Por la igualdad de logaritmos, $x+1 = \frac{5x-13}{x-3} \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 5x - 13 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow$

$$x = \frac{7 \pm 3}{2} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 2 \end{cases}}$$

NOTA: La solución $x_2 = 2$ no es válida pues al sustituir salen logaritmos negativos que no existen en el campo real.

6. SISTEMAS DE ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Un sistema de ecuaciones es **logarítmico** si, por lo menos, una de las ecuaciones es logarítmica.

Ejemplo: Resuelve $\begin{cases} x + y = 22 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

En la segunda ecuación, aplicamos las propiedades de los logaritmos y su definición

$$\begin{cases} x + y = 22 \\ \log \dfrac{x}{y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 22 \\ \dfrac{x}{y} = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 22 \\ x = 10y \end{cases} \Rightarrow$$

Y ya resolvemos por sutitución $\boxed{\begin{cases} x = 20 \\ y = 2 \end{cases}}$

Ejemplo: Resuelve $\begin{cases} \log(x + y) + \log(x - y) = \log 33 \\ 2^x \cdot 2^y = 2^{11} \end{cases}$

$$\begin{cases} \log[(x + y)(x - y)] = \log 33 \\ 2^{x+y} = 2^{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + y)\cdot(x - y) = 33 \\ x + y = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + y)\cdot(x - y) = 33 \\ y = 11 - x \end{cases}$$

Lo resolvemos por sustitución:

$$\Rightarrow 11\cdot(2x - 11) = 33 \Rightarrow 22x = 154 \Rightarrow x = 7 \quad \Rightarrow y = 4$$

Ejemplo: Resuelve $\begin{cases} 2\log x - 3\log y = 7 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$

Vamos a resolverlo de dos maneras distintas:

1ª Forma: Haciendo un cambio de variables y resolviendo el sistema lineal de dos ecuaciones resultante y después deshaciendo el cambio.

Hacemos $\begin{cases} \log x = z \\ \log y = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z - 3t = 7 \\ z + t = 1 \end{cases} \overset{E_1 - 2\cdot E_2}{\Rightarrow} \begin{cases} -5t = 5 \\ z + t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ z = 2 \end{cases}$

Deshacemos el cambio:

$$\begin{cases} \log x = z = 2 \\ \log y = t = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 10^2 = 100 \\ y = 10^{-1} = \dfrac{1}{10} \end{cases}}$$

2ª Forma: Convirtiendo cada ecuación logarítmica en una ecuación algebraica

$$\begin{cases} 2\log x - 3\log y = 7 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x^2 - \log y^3 = 7 \\ \log(x\cdot y) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log \dfrac{x^2}{y^3} = 7 \\ x\cdot y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{y^3} = 10^7 \\ x\cdot y = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{y^3} = 10^7 \\ y = \dfrac{10}{x} \end{cases}$$ Sustituimos y nos queda $$\frac{x^2}{\left(\frac{10}{x}\right)^3} = 10^7 \Rightarrow \frac{x^5}{10^3} = 10^7 \Rightarrow x^5 = 10^{10} \Rightarrow$$

$$x = \sqrt[5]{10^{10}} \Rightarrow \boxed{x = 10^2 = 100}$$

Y por tanto: $$y = \frac{10}{10^2} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{10}}$$

7. INTERÉS SIMPLE E INTERÉS COMPUESTO

Cuando depositamos dinero en un banco, éste nos paga un interés de un determinado tanto por ciento, por la cantidad depositada. Habitualmente se suele pagar anualmente el interés. Así, por ejemplo, si depositamos 5.000 € en una libreta de ahorros al 1´5 % anual, al cumplirse el año recibimos como pago de intereses la cantidad de:

$$\frac{5000 \cdot 1'5}{100} = 75€$$

La cantidad que hemos depositado (5000 €) se llama capital. El beneficio obtenido (45 €) se llama interés. El 1´5 % se llama rédito o tanto por ciento, que es también la cantidad de intereses que producen 100 €. A la cantidad que produce de intereses 1 € se le llama tanto por uno y en este ejemplo es 0´015.

Definiciones:

- Se llama **capital**, **C**, a la cantidad de dinero que depositamos en una entidad financiera.
- Se llama **interés**, **I**, a la cantidad de dinero producida por un capital en un tiempo determinado.
- Se llama **rédito** o **tanto por ciento**, **R**, a la ganancia que producen 100 euros en un año.
- Se llama **tanto por uno**, **r**, a la ganancia que produce un euro en un año. Se verifica que:

$$r = \frac{R}{100}$$

Un capital colocado al R % en un año produce $\frac{C \cdot R}{100}$ de interés, luego en *t* años producirá un interés de:

$\boxed{I = \frac{C \cdot R \cdot t}{100}}$ o bien, como $r = \frac{R}{100}$ tenemos que $\boxed{I = C \cdot r \cdot t}$

NOTA IMPORTANTE: A veces los intereses se devengan mensualmente, o trimestralmente o semestralmente o en días, de donde resultan las expresiones siguientes:

Mensualmente: En un año sabemos que el interés producido es $\frac{C \cdot R}{100}$, por tanto en un mes será $\frac{\frac{C \cdot R}{100}}{12} = \frac{C \cdot R}{1200}$

Si tenemos el capital invertido T meses, obtenemos de interés $\boxed{I = \frac{C \cdot R \cdot T}{1200}}$ o bien $\boxed{I = \frac{C \cdot r \cdot T}{12}}$

Trimestralmente: De forma análoga a lo anterior tenemos que el interés devengado es, puesto que un año tiene 4 trimestres: $\boxed{I = \frac{C \cdot R \cdot T}{400}}$ o bien $\boxed{I = \frac{C \cdot r \cdot T}{4}}$, donde T es el nº de trimestres

Semestralmente: De forma análoga a lo anterior tenemos que el interés devengado es, puesto que un año tiene 2 semestres: $\boxed{I = \frac{C \cdot R \cdot T}{200}}$ o bien $\boxed{I = \frac{C \cdot r \cdot T}{2}}$, donde T es el nº de semestres

Diariamente: De forma análoga a lo anterior tenemos que el interés devengado es, puesto que un año tiene 365 días: $\boxed{I = \frac{C \cdot R \cdot T}{36500}}$ o bien $\boxed{I = \frac{C \cdot r \cdot T}{365}}$, donde T es el nº de días

De manera general, cuando los intereses se devengan n veces a lo largo de un año (cada año con n periodos iguales), la expresión del interés es: $\boxed{I = \frac{C \cdot R \cdot T}{n \cdot 100}}$ o bien $\boxed{I = C \cdot \frac{r}{n} \cdot T}$ siendo T el nº de periodos por los que devengamos los intereses.

Ejemplo: Colocamos en un banco 9 000 € al 4´5 %, percibiendo los intereses semestralmente. Si hemos cobrado 607´5 € en concepto de intereses, ¿cuánto tiempo hemos tenido el dinero en el banco?

Tenemos por la fórmula que $I = \frac{C \cdot r \cdot T}{2} \Rightarrow$ Sustituimos cada valor $607'5 = \frac{9000 \cdot 0'045 \cdot T}{2} \Rightarrow$ Despejamos T

$T = \frac{2 \cdot 607'5}{9000 \cdot 0'045} \Rightarrow T = 3$ semestres. Es decir, año y medio ó 18 meses.

Esto que hemos visto es interés simple. Pasemos ahora a estudiar el interés compuesto.

Definición: Colocar un capital a **interés compuesto** significa que el capital se va incrementando con los intereses producidos en cada periodo de tiempo. Al capital existente en cada momento se le llama **montante**

Supongamos que tenemos un capital, C, colocado al tanto por uno, r, al final del primer año tenemos un montante de:

$M_1 = C + C \cdot r \Rightarrow M_1 = C \cdot (1 + r)^1$, si seguimos otro año más, este será el nuevo capital y por tanto el montante al final del 2º año será:

$M_2 = C \cdot (1+r) + C \cdot (1+r) \cdot r \Rightarrow$ Sacamos factor común $C \cdot (1+r)$ y nos queda

$M_2 = C \cdot (1+r)(1+r) \Rightarrow M_2 = C \cdot (1+r)^2$

De forma análoga, al final del tercer año tendremos un montante de:

$M_3 = C \cdot (1+r)^3$

Así al final de t años tendremos montante de:

$$\boxed{M = C \cdot (1+r)^t}$$

Cuando capitalizamos n veces a lo largo de un año o en n periodos cada año, entonces la fórmula nos queda:

$$\boxed{M = C \cdot \left(1+\frac{r}{n}\right)^T}$$ siendo T el nº de periodos

Ejemplo: ¿Durante cuánto tiempo ha de invertirse un capital de 12 000 € al 6 % de interés compuesto para llegar a obtener un montante de 13 926´49 € si la capitalización se produce trimestralmente?

Como es trimestralmente tenemos que *n* = 4 y ahora hemos de calcular cuánto trimestres se necesitan aplicando la fórmula

$$M = C \cdot \left(1+\frac{r}{n}\right)^T \Rightarrow 13926´49 = 12000 \cdot \left(1+\frac{0´06}{4}\right)^T \Rightarrow \left(\frac{4´06}{4}\right)^T = \frac{13926´49}{12000} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{4´06}{4}\right)^T = \frac{13926´49}{12000} \Rightarrow (1´015)^T = 1´160540833 \Rightarrow$$ Tomamos, por ejemplo, logaritmos neperianos,

$$\ln(1´015)^T = \ln(1´160540833) \Rightarrow T \cdot \ln(1´015) = \ln(1´160540833) \Rightarrow T = \frac{\ln(1´160540833)}{\ln(1´015)} \Rightarrow$$

$T = 10$ trimestres, es decir, 30 meses