

ECUACIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

A. Introducción teórica

B. Ejercicios resueltos

A. INTRODUCCIÓN TEÓRICA

A.1 Ecuaciones Logarítmicas

En las ecuaciones exponenciales alguna de las incógnitas aparece expresada bajo un logaritmo. Para que las incógnitas estén libres, aplicaremos las propiedades de los logaritmos de forma conveniente.

El juego que se sigue suele ser el siguiente: los números que aparecen en la ecuación logarítmica se expresan como logaritmos y luego se eliminan los logaritmos de la ecuación, quedando las incógnitas libres para ser despejadas.

Ejemplo: $\log_{10}(x-2) = 2$

Solución:

Expresamos el 2 como un logaritmo:

$$2 = 2\log_{10} 10 = \log_{10} 10^2$$

$$\text{Entonces: } \log_{10}(x-2) = \log_{10} 100$$

Como tenemos logaritmos en ambos miembros de la ecuación, simplificamos y resolvemos:

$$\cancel{\log_{10}}(x-2) = \cancel{\log_{10}} 100 \Rightarrow x-2 = 100 \Rightarrow x = 102$$

A.2. Ecuaciones exponenciales

En las ecuaciones exponenciales alguna de las incógnitas es el exponente en una potencia. Para quitar la incógnita de un exponente se usan a veces las propiedades logarítmicas. En otras ocasiones es útil expresar todos los términos en forma de potencia con la misma base. Puede ser útil, en ocasiones recurrir a un cambio de variable para poder simplificar la ecuación a resolver. Hay ecuaciones en las que tendremos que aplicar todos estos recursos.

Ejemplo: $7^{x-1} = 49$

Solución:

Expresamos el 49 en forma de potencia $49 = 7^2$

Entonces: $7^{x-1} = 7^2$

De aquí es inmediato que:

$$7^{x-1} = 7^2 \Rightarrow x-1 = 2 \Rightarrow x = 3$$

B. Ejercicios resueltos

1. $\log_2 x = 8$

Solución:

▪ Método de resolución 1:

- Aplicamos simplemente la definición de logaritmo:

$$\log_2 x = 8 \Rightarrow \boxed{x = 2^8}$$

▪ Modo de resolución 2:

- Intentamos reescribir el miembro de la derecha en función de un logaritmo y luego lo cancelamos con el logaritmo del término de la izquierda.

- El miembro de la derecha se reescribe como sigue:

$$8 = 2^3 = 2^3 \log_2 2 = \log_2 2^{2^3} = \log_2 2^8$$

- Finalmente igualamos ambos miembros y simplificamos:

$$\log_2 x = \log_2 2^8 \Rightarrow \cancel{\log_2} x = \cancel{\log_2} 2^8 \Rightarrow \boxed{x = 2^8}$$

2. $\log_5 x = -1$

Solución:

- Aplicamos la definición de logaritmo: $\log_5 x = -1 \Rightarrow x = 5^{-1} = \boxed{\frac{1}{5}}$

3. $\log_3 \log_5 x = -1$

Solución:

- Aplicamos la definición de logaritmo: $\log_5 x = 3^{-1} \Rightarrow \log_5 x = \frac{1}{3}$

- Volvemos a aplicar la definición de logaritmo:

$$\log_5 x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 5^{\frac{1}{3}} = \boxed{\sqrt[3]{5}}$$

4. $\log(x+6) - \log(2x-1) = 0$

Solución:

En esta ecuación logarítmica los logaritmos se van de forma inmediata:

$$\log(x+6) - \log(2x-1) = 0 \Rightarrow \cancel{\log}(x+6) = \cancel{\log}(2x-1) \Rightarrow x+6 = 2x-1$$

Ahora simplemente despejamos x:

$$x+6 = 2x-1 \Rightarrow \boxed{x=7}$$

5. $\log_3(x+2) + \log_3(x-4) = 3$

Solución:

Debemos expresar el número 3 en forma de logaritmo, con el fin de tener logaritmos en ambos miembros.

$$3 = 3 \log_3 3 \Rightarrow 3 = \log_3 3^3$$

Entonces:

$$\log_3(x+2) + \log_3(x-4) = \log_3 3^3$$

El primer miembro de la ecuación puede escribirse en función de un solo logaritmo:

$$\log_3(x+2) + \log_3(x-4) = \log_3(x+2)(x-4)$$

Teniendo esto en cuenta, la ecuación logarítmica a resolver es:

$$\log_3(x+2)(x-4) = \log_3 3^3$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} \log_3(x+2)(x-4) &= \log_3 3^3 \Rightarrow \cancel{\log_3}(x+2)(x-4) = \cancel{\log_3} 3^3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x+2)(x-4) = 27 \Rightarrow x^2 - 2x - 35 = 0 \end{aligned}$$

Las soluciones de esta ecuación de segundo grado son:

$$x^2 - 2x - 35 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 140}}{2} = \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = -5 \text{ (no verifica la ecuación)} \end{cases}$$

6. $3 \log x - \log 30 = \log \frac{x^2}{5}$

Solución:

$$3 \log x - \log 30 = \log \frac{x^2}{5} \Rightarrow \log x^3 - \log 30 = \log \frac{x^2}{5} \Rightarrow \cancel{\log} \frac{x^3}{30} = \cancel{\log} \frac{x^2}{5} \Rightarrow$$

$$\frac{x^3}{30} = \frac{x^2}{5} \Rightarrow x^3 - 6x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0; x_2 = 0 \text{ (no verifican la ecuación)} \\ x_3 = 6 \end{cases}$$

7. $\log_3 \left(\frac{x+1}{2x-1} \right) = 2$

Solución:

$$\log_3 \left(\frac{x+1}{2x-1} \right) = 2 \Rightarrow \log_3 \left(\frac{x+1}{2x-1} \right) = \log_3(3^2) \Rightarrow \cancel{\log_3} \left(\frac{x+1}{2x-1} \right) = \cancel{\log_3}(3^2)$$

Ahora resolvemos la ecuación de grado uno en la que se ha simplificado la ecuación logarítmica:

$$\frac{x+1}{2x-1} = 9 \Rightarrow 9(2x-1) = x+1 \Rightarrow 18x-9 = x+1 \Rightarrow x = \frac{10}{17}$$

8. $\log_{2x+1} \left(\frac{x^4+2}{2x+1} \right) = 1$

Solución:

$$\begin{aligned} \log_{2x+1} \left(\frac{x^4 + 2}{2x+1} \right) = 1 &\Rightarrow \log_{2x+1} \left(\frac{x^4 + 2}{2x+1} \right) = \log_{2x+1} (2x+1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \cancel{\log_{2x+1}} \left(\frac{x^4 + 2}{2x+1} \right) &= \cancel{\log_{2x+1}} (2x+1) \Rightarrow \frac{x^4 + 2}{2x+1} = 2x+1 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^4 + 2 &= 4x^4 + 4x + 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

9. $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$

Solución:

$$\begin{aligned} \log_3(3^x - 8) = 2 - x &\Rightarrow \log_3(3^x - 8) = (2 - x)\log_3 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow \cancel{\log_3}(3^x - 8) &= \cancel{\log_3} 3^{2-x} \Rightarrow 3^x - \frac{3^2}{3^x} - 8 = 0 \Rightarrow 3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0 \end{aligned}$$

Hacemos el cambio $3^x \equiv t$. Entonces:

$$3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0 \Rightarrow t^2 - 8t - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 9 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x = 3^2 \\ 3^x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 2} \\ \text{sin solución} \end{cases}$$

10. $7^{3x-2} = 1$

Solución:

$$7^{3x-2} = 7^0 \Rightarrow 3x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{3}}$$

11. $3^x - 3^{1-x} = 2$

Solución:

$$3^x - 3^{1-x} = 2 \Rightarrow 3^x - 3 \cdot \frac{1}{3^x} = 2 \Rightarrow (3^x)^2 - 3 = 2 \cdot 3^x$$

Ahora hacemos el cambio $t \equiv 3^x$. Así:

$$(3^x)^2 - 3 = 2 \cdot 3^x \Rightarrow t^2 - 2t - 3 = 0$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado de forma usual obtenemos las soluciones:

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = -1 \end{cases}$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x = 3 \\ 3^x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 1} \\ 3^x = -1 \text{ no tiene solución} \end{cases}$$

12. $2^{2x} - 2^x = 12$

Solución:

Hacemos el siguiente cambio de variable: $2^x \equiv z$. Entonces la ecuación se puede escribir del siguiente modo:

$$z^2 - z = 12 \Rightarrow z^2 - z - 12 = 0 \Rightarrow z = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 7}{2} =$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = 4 \\ z_2 = -3 \end{cases}$$

Ahora tenemos que deshacer el cambio:

$$2^x = z \Rightarrow \begin{cases} 2^x = z_1 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow \boxed{x = 2} \\ 2^x = z_2 \Rightarrow 2^x = -3 \Rightarrow \log 2^x = \log(-3) \Rightarrow \text{sin solución} \end{cases}$$

13. $2^{2+x} - 2^{1+x} + 2^x = \frac{1}{2}$

Solución:

$$2^2 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^x + 2^x = 2^{-1} \Rightarrow 3 \cdot 2^x = 2^{-1}$$

Vamos a hacer el cambio $2^x \equiv t$. Entonces: $3 \cdot t = 2^{-1} \Rightarrow t = \frac{1}{6}$ y

deshaciendo el cambio:

$$2^x = \frac{1}{6} \Rightarrow \log(2^x) = \log(6^{-1}) \Rightarrow x = -\frac{\log 2 + \log 3}{\log 2} \Rightarrow \boxed{x = -1 - \frac{\log 3}{\log 2}}$$

14. $e^x - 6e^{-x} = 1$

Solución:

$$e^x - 6e^{-x} = 1 \Rightarrow e^x - \frac{6}{e^x} = 1 \Rightarrow (e^x)^2 - 6 = e^x \Rightarrow (e^x)^2 - e^x - 6 = 0$$

En esta ecuación hagamos ahora el cambio $u = e^x$. Así:

$$(e^x)^2 - e^x - 6 = 0 \Rightarrow u^2 - u - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_1 = -2 \\ u_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^x = -2 \text{ (no tiene solución)} \\ e^x = 3 \Rightarrow \ln e^x = \ln 3 \Rightarrow \boxed{x = \ln 3} \end{cases}$$

15. $3^{2x+1} - 5 = 11$

Solución:

$$3^{2x+1} - 5 = 11 \Rightarrow 3^{2x+1} = 16 \Rightarrow 3^{2x+1} = 2^4 \Rightarrow \log(3^{2x+1}) = \log(2^4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2x+1)\log(3) = 4\log(2) \Rightarrow x = \frac{4\log(2)}{2\log(3)} - \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{2\log(2)}{\log(3)} - \frac{1}{2}}$$

16.
$$\left. \begin{array}{l} 2^{x-y} = 256 \\ \log x = \log 1024 - 3\log 2 - \log y \end{array} \right\}$$

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 2^{x-y} = 256 \\ \log x = \log 1024 - 3\log 2 - \log y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2^{x-y} = 2^8 \\ \log x = \log \frac{2^{10}}{2^3 y} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y = 8 \\ x = \frac{2^7}{y} \end{array} \right\}$$

Llevamos ahora la segunda ecuación del sistema, $x = \frac{2^7}{y}$, a la primera ecuación:

$$\frac{2^7}{y} - y = 8 \Rightarrow y^2 + 8y - 128 = 0 \Rightarrow y = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 4 \cdot 128}}{2} = \begin{cases} y_1 = -16 \\ y_2 = 8 \end{cases}$$

Obtenemos, por último, los valores de x:

$$\begin{cases} y_1 = -16 \\ y_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2^7}{-16} = -8 \\ x_2 = \frac{2^7}{8} = 16 \end{cases}$$

Conclusión:

$$\begin{cases} (x_1, y_1) = (-8, -16) \text{ (no verifica el sistema)} \\ \boxed{(x_2, y_2) = (16, 8)} \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 5 \cdot (\log_x y + \log_y x) = 26 \\ x \cdot y = 64 \end{cases}$$

Solución:

Estamos interesados en que los logaritmos que aparecen tengan la misma base, para poder manipularlos fácilmente.

Si aplicamos la expresión de cambio de base de los logaritmos (la cual se puede escribir así: $\log_x y = \frac{\log_c x}{\log_c y}$) de forma conveniente, podremos reescribir $\log_y x$ en función de $\log_x y$.

En nuestro caso:

$\log_x y = \frac{\log_x x}{\log_x y} \Rightarrow \log_x y = \frac{1}{\log_x y}$, por lo que podemos reescribir el sistema como sigue:

$$5 \cdot \begin{cases} \log_x y + \frac{1}{\log_x y} = 26 \\ x \cdot y = 64 \end{cases}$$

Operamos la primera ecuación del sistema:

$$5 \cdot \left(\log_x y + \frac{1}{\log_x y} \right) = 26 \Rightarrow 5(\log_x y)^2 - 26 \cdot \log_x y + 5 = 0$$

Hacemos el cambio $\log_x y \equiv t$ y resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$5t^2 - 26 \cdot t + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = \frac{1}{5} \end{cases}, \text{ es decir: } \begin{cases} \log_x y = 5 \\ \log_x y = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^5 \\ y = x^{\frac{1}{5}} \end{cases}$$

Tenemos entonces dos casos:

$$a) \begin{cases} y = x^5 \\ x \cdot y = 64 \end{cases} \quad \text{Despejamos y en la segunda ecuación y sustituimos en la primera:}$$

$$y = \frac{64}{x} \Rightarrow \frac{64}{x} = x^5 \Rightarrow x = 2, \text{ por lo que una solución es}$$

$$\boxed{(2, 32)}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} y = x^{\frac{1}{5}} \\ x \cdot y = 64 \end{array} \right\} \text{ Despejamos y en la segunda ecuación y sustituimos en la primera:}$$

$$y = \frac{64}{x} \Rightarrow \frac{64}{x} = x^{\frac{1}{5}} \Rightarrow x = 32, \text{ por lo que la otra solución es } \boxed{(32, 2)}$$
