

EJERCICIOS RESUELTOS COMPLEJOS

Cuestión 1.-

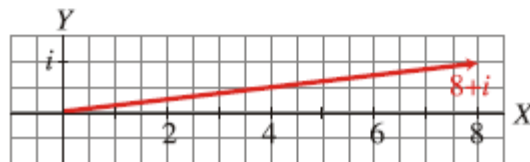
Efectúa, en forma binómica, y representa gráficamente la solución:

$$\frac{13i^4(2-i)}{3-2i}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{13i^4(2-i)}{3-2i} &= \frac{13 \cdot 1(2-i)}{3-2i} = \frac{13(2-i)}{3-2i} = \frac{13(2-i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{13(6+4i-3i-2i^2)}{9-4i^2} = \\ &= \frac{13(6+4i-3i+2)}{9+4} = \frac{13(8+i)}{13} = 8+i\end{aligned}$$

Representación gráfica:



Cuestión 2.-

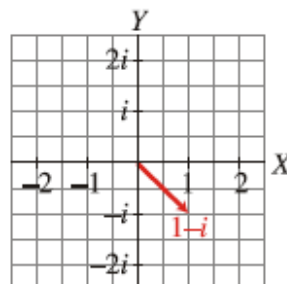
Calcula y representa gráficamente la solución que obtengas:

$$\frac{(3-i)i^3}{1-2i}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{(3-i)i^3}{1-2i} &= \frac{(3-i)(-i)}{1-2i} = \frac{-3i+i^2}{1-2i} = \frac{-3i-1}{1-2i} = \frac{-1-3i}{1-2i} = \frac{(-1-3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-1-2i-3i-6i^2}{1-4i^2} = \frac{-1-2i-3i+6}{1+4} = \\ &= \frac{5-5i}{5} = \frac{5}{5} - \frac{5i}{5} = 1-i\end{aligned}$$

Representación gráfica:



Cuestión 3.-

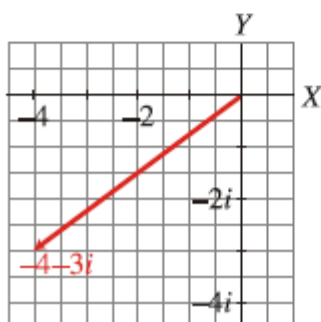
Halla en forma binómica y representa la solución obtenida:

$$\frac{5i^6(-2+i)}{-1+2i}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{5i^6(-2+i)}{-1+2i} &= \frac{5(-1)(-2+i)}{-1+2i} = \frac{-5(-2+i)}{-1+2i} = \frac{-5(-2+i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{-5(2+4i-i-2i^2)}{1-4i^2} = \\ &= \frac{-5(2+4i-i+2)}{1+4} = \frac{-5(4+3i)}{5} = -4-3i\end{aligned}$$

Representación gráfica:



Cuestión 4.-

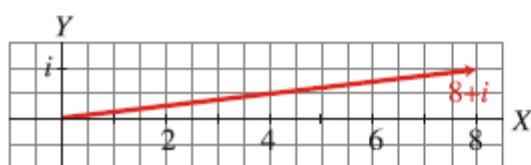
Calcula y representa gráficamente la solución:

$$\frac{-10i^7(2-3i)}{4+2i}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{-10i^7(2-3i)}{4+2i} &= \frac{-10(-i)(2-3i)}{4+2i} = \frac{10i(2-3i)}{4+2i} = \frac{20i-30i^2}{4+2i} = \frac{30+20i}{4+2i} = \frac{(30+20i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)} = \\ &= \frac{120-60i+80i-40i^2}{16-4i^2} = \frac{120-60i+80i+40}{16+4} = \frac{160+20i}{20} = \frac{160}{20} + \frac{20i}{20} = 8+i\end{aligned}$$

Representación gráfica:



Cuestión 5.-

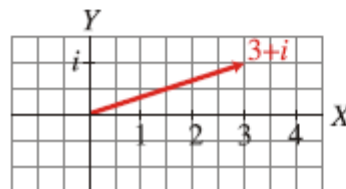
Calcula en forma binómica y representa gráficamente la solución:

$$\frac{(4-2i)i^5}{1+i}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{(4-2i)i^5}{1+i} &= \frac{(4-2i)i}{1+i} = \frac{4i-2i^2}{1+i} = \frac{4i+2}{1+i} = \frac{2+4i}{1+i} = \frac{(2+4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-2i+4i-4i^2}{1-i^2} = \frac{2-2i+4i+4}{1+1} = \\ &= \frac{6+2i}{2} = \frac{6}{2} + \frac{2i}{2} = 3+i\end{aligned}$$

Representación gráfica:



Cuestión 6.-

Hallar "a" para que el complejo $\frac{3+2i}{a+6i}$:

- a) sea real puro
- b) sea imaginario puro

Solución.

Lo primero de todo es hacer la división en forma binómica, multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador, de esta forma se elimina la unidad imaginaria del denominador.

$$\frac{3+2i}{a+6i} = \frac{(3+2i) \cdot (a-6i)}{(a+6i) \cdot (a-6i)} = \frac{(3 \cdot a + 2 \cdot (-6)i^2) + (3 \cdot (-6) + 2 \cdot a)i}{a^2 - 6^2 i^2} = \frac{(3a+12) + (2a-18)i}{a^2+36} = \frac{3a+12}{a^2+36} + \frac{2a-18}{a^2+36} i$$

a) Número complejo real puro \Leftrightarrow la parte imaginaria nula.

$$\frac{2a-18}{a^2+36} = 0 \quad : \quad 2a-18=0 \quad : \quad a = \frac{18}{2} = 9$$

b) Número complejo imaginario puro \Leftrightarrow la parte real nula.

$$\frac{3a+12}{a^2+36} = 0 \quad : \quad 3a+12=0 \quad : \quad a = \frac{-12}{3} = -4$$

Cuestión 7.-

Hallar el valor de k para que el complejo $\frac{2-(1+k)i}{1-ki}$ sea un n° real. Hallar su cociente.

Solución.

Se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador.

$$\frac{2-(1+k)i}{1-ki} = \frac{(2-(1+k)i) \cdot (1+ki)}{(1-ki) \cdot (1+ki)} = \frac{(2 \cdot 1 + (-1+k)) \cdot ki^2 + (2 \cdot k + (-1+k) \cdot 1)i}{1^2 - k^2i^2} = \frac{(2+k+k^2) + (k-1)i}{1+k^2} =$$
$$= \frac{2+k+k^2}{1+k^2} + \frac{k-1}{1+k^2}i$$

Para que un número complejo sea real puro, la parte imaginaria debe ser nula.

$$\frac{k-1}{1+k^2} = 0 \quad : \quad k-1=0 \quad : \quad k=1$$

Para $k=1$:

$$= \frac{2+1+1^2}{1+1^2} + \frac{1-1}{1+1^2}i = \frac{3}{2} + 0i$$

Cuestión 8.-

Hallar a y b para que el complejo $\frac{a+2i}{3+bi}$ sea igual $\sqrt{2}_{315}$

Solución.

$$\frac{a+2i}{3+bi} = \sqrt{2}_{315}$$

Lo primero es expresar el segundo miembro de la igualdad en forma binómica.

$$\sqrt{2}_{315} = \sqrt{2} \cdot (\cos 315 + i \operatorname{sen} 315) = \left\{ \begin{array}{l} \cos 315 = \cos(-45) = \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen} 315 = \operatorname{sen}(-45) = -\operatorname{sen} 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 1-i$$

$$\frac{a+2i}{3+bi} = 1-i$$

Los parámetros a y b se calculan por identificación igualando las partes reales y las imaginarias, para lo cual lo más sencillo es pasar el denominador al segundo miembro y operar el producto.

$$a+2i = (1-i) \cdot (3+bi)$$

$$a+2i = (1 \cdot 3 + (-1) \cdot bi^2) + (1 \cdot b + (-1) \cdot 3)i$$

$$a+2i = (3+b) + (b-3)i \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} : a = 3+b \\ \operatorname{Im} : 2 = b-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 5 \end{cases}$$

Cuestión 9.-

Hallar dos números complejos cuya diferencia es imaginaria, su suma tiene como parte imaginaria 5 y su producto vale $-5+5i$.

Solución.

Se pide hallar dos números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ que cumplan las siguientes condiciones:

1. $\operatorname{Re}(z_1 - z_2) = 0$

$$z_1 - z_2 = a + bi - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$\operatorname{Re}(z_1 - z_2) = a - c = 0$$

2. $\text{Im}(z_1 + z_2) = 5$

$$z_1 + z_2 = a + bi + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$\text{Im}(z_1 + z_2) = b + d = 5$$

3. $z_1 \cdot z_2 = -5 + 5i$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)i = -5 + 5i$$

$$\begin{cases} \text{Re} : a \cdot c - b \cdot d = -5 \\ \text{Im} : a \cdot d + b \cdot c = 5 \end{cases}$$

Las condiciones propuestas permiten plantear un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas.

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ b + d = 5 \\ ac - bd = -5 \\ ad + bc = 5 \end{cases} \quad a = c \quad \begin{cases} b + d = 5 \\ a^2 - bd = -5 \\ ad + ba = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} b + d = 5 \\ a^2 - bd = -5 \\ a(b + d) = 5 \end{cases}$$

Sustituyendo la 1ª en la 3ª:

$$a \cdot 5 = 5 \quad a = c = 1$$

$$\begin{cases} b + d = 5 \\ 1^2 - bd = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} b + d = 5 \\ bd = 6 \end{cases}$$

Por sustitución

$$d = 5 - b \quad b \cdot (5 - b) = 6$$

Ordenando se obtiene una ecuación de 2º grado.

$$b^2 - 5b + 6 = 0 : \begin{cases} b = 1 \rightarrow d = 5 - 1 = 4 \\ b = 5 \rightarrow d = 5 - 5 = 0 \end{cases}$$

Posibles soluciones:

$$z_1 = 1 + i \text{ y } z_2 = 1 + 4i$$

ó

$$z_1 = 1 + 5i \text{ y } z_2 = 1 + 0i$$

Cuestión 10.-

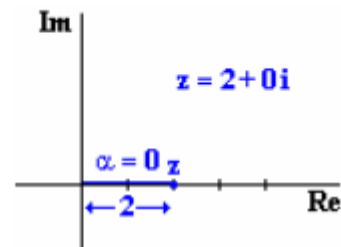
Expresar en forma polar los siguientes nº complejos:

- a) 2
- b) -5
- c) i
- d) $-2 + 2\sqrt{3}i$
- e) $\sqrt{3} - i$

Solución.

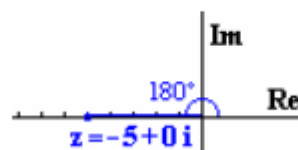
a) $z = 2$. Numero complejo real puro positivo, con dibujarlo basta para obtener su forma polar.

$$Z = 2 = 2 + 0i = 2_{0^\circ}$$



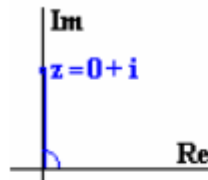
b) $z = -5$. Numero complejo real puro negativo.

$$Z = -5 + 0i = 5_{180^\circ}$$



c) $z = i$. Numero complejo imaginario puro.

$$Z = 0 + i = 1_{90^\circ}$$



d) $Z = -2 + 2\sqrt{3}i$

$$Z \in 2^\circ \text{ Cuadrante: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Módulo: } r = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4 \\ \text{Argumento: } \alpha = 180 - \arctg \left| \frac{2\sqrt{3}}{-2} \right| = 180 - \arctg \sqrt{3} = 120 \end{array} \right\} : Z = 4_{120^\circ}$$

e) $Z = \sqrt{3} - i$

$$Z \in 4^\circ \text{ Cuadrante: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Módulo: } r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \text{Argumento: } \alpha = 360 - \arctg \left| \frac{-1}{\sqrt{3}} \right| = 360 - \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = 330 \end{array} \right\} : Z = 2_{330^\circ}$$

Cuestión 11.-

Expresar en forma binómica los siguientes complejos:

- a) 3_{180°
- b) 6_{30°
- c) 2_{270°
- d) $\sqrt{2}_{45^\circ}$

Solución.

a) $Z = 3_{180^\circ} = 3 \cdot (\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 3 \cdot (-1 + 0i) = -3$

b) $Z = 6_{30^\circ} = 6 \cdot (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

c) $Z = 2_{270^\circ} = 2 \cdot (\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ) = 2 \cdot (0 + (-1)i) = -2i$

d) $Z = \sqrt{2}_{45^\circ} = \sqrt{2} \cdot (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 1 + i$

Cuestión 12.-

Sean los complejos:

$$Z = 3_{30^\circ} ; W = 2_{60^\circ} ; P = 2 + 2i ; Q = 2 - 2\sqrt{3}i$$

realizar las siguientes operaciones:

- a) $Z \cdot W$
- b) $\overline{Z} \cdot \overline{W}^2$
- c) P^2
- d) Q^5
- e) $\frac{Z^2 \cdot \overline{P}}{Q^{-1}}$
- f) $\frac{Q^3 + Z^3}{W^3 - P^3}$

Solución.

Excepto la suma o resta, las demás operaciones es más fácil hacerlas en forma polar.

$$P = 2 + 2i \in 1^\circ \text{ Cuadrante} : \left\{ \begin{array}{l} \text{Módulo : } r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} \\ \text{Argumento : } \alpha = \operatorname{arctg} \left| \frac{2}{2} \right| = \operatorname{arctg} 1 = 45^\circ \end{array} \right\} : P = \sqrt{8}_{45^\circ}$$

$$Q = 2 - 2\sqrt{3}i \in 4^\circ \text{ Cuadrante} : \left\{ \begin{array}{l} \text{Módulo : } r = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4 \\ \text{Argumento : } \alpha = 360 - \operatorname{arctg} \left| \frac{-2\sqrt{3}}{2} \right| = 360 - \operatorname{arctg} \sqrt{3} = 300 \end{array} \right\} : Q = 4_{300^\circ}$$

a. $Z \cdot W = 3_{30^\circ} \cdot 2_{60^\circ} = (3 \cdot 2)_{30^\circ + 60^\circ} = 6_{90^\circ} = 6 \cdot (\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ) = 6i$

b. $\bar{Z} \cdot \overline{W}^2 = \left\{ \begin{array}{l} \bar{Z} = \overline{3_{30^\circ}} = 3_{-30^\circ} = 3_{330^\circ} \\ \overline{W} = \overline{2_{60^\circ}} = 2_{-60^\circ} = 2_{300^\circ} \end{array} \right\} = 3_{330^\circ} \cdot (2_{300^\circ})^2 = 3_{330^\circ} \cdot 2^2_{300^\circ \times 2} = 3_{330^\circ} \cdot 4_{600^\circ} =$

$$= (3 \cdot 4)_{330^\circ + 600^\circ} = 12_{930^\circ} = 12_{2 \times 360^\circ + 210^\circ} = 12_{210^\circ} = 12 \cdot (\cos 210 + i \operatorname{sen} 210^\circ) = 12 \cdot (-\cos 30 - i \operatorname{sen} 30^\circ) =$$

$$= 12 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = -6\sqrt{3} - 6i$$

c. $P^2 = (\sqrt{8}_{45^\circ})^2 = (\sqrt{8})^2_{45^\circ \times 2} = 8_{90^\circ} = 8 \cdot (\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ) = 8i$

d. $Q^5 = (4_{300^\circ})^5 = 4^5_{300^\circ \times 5} = 1024_{1500^\circ} = 1024_{4 \times 360^\circ + 60^\circ} = 1024_{60^\circ} =$

$$= 1024 \cdot (\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 512 + 512\sqrt{3}i$$

e. $\frac{Z^2 \cdot \bar{P}}{Q^{-1}} = \frac{(3_{30^\circ})^2 \cdot \overline{\sqrt{8}_{45^\circ}}}{(4_{300^\circ})^{-1}} = \frac{3^2_{30^\circ \times 2} \cdot \sqrt{8}_{-45^\circ}}{4^{-1}_{300^\circ \times (-1)}} = \frac{9_{60^\circ} \cdot \sqrt{8}_{315}}{4^{-1}_{-300^\circ}} = \frac{9_{60^\circ} \cdot \sqrt{8}_{315}}{4^{-1}_{60^\circ}}$

$$\frac{9\sqrt{8}}{4^{-1}}_{60^\circ + 315^\circ - 60^\circ} = 36\sqrt{8}_{315} = 36\sqrt{8} \cdot (\cos 315 + i \operatorname{sen} 315) = 36\sqrt{8} \cdot (\cos 45 - i \operatorname{sen} 45) =$$

$$= 36\sqrt{8} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 72 - 72i$$

f. $\frac{Q^3 + Z^3}{W^3 - P^3} = \frac{(4_{300^\circ})^3 + (3_{30^\circ})^3}{(2_{60^\circ})^3 - (\sqrt{8}_{45^\circ})^3} = \frac{4^3_{300^\circ \times 3} + 3^3_{30^\circ \times 3}}{2^3_{60^\circ \times 3} - \sqrt{8}^3_{45^\circ \times 3}} = \frac{64_{900^\circ} + 27_{90^\circ}}{8_{180^\circ} - 16\sqrt{2}_{135}} =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{64_{360^\circ \times 2 + 180^\circ} + 27_{90^\circ}}{8_{180^\circ} - 16\sqrt{2}_{135}} = \frac{64_{180^\circ} + 27_{90^\circ}}{8_{180^\circ} - 16\sqrt{2}_{135}} = \frac{64 \cdot (\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) + 27 \cdot (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)}{8 \cdot (\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) - 16\sqrt{2} \cdot (\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)} = \\
&= \frac{64 \cdot (-1 + 0i) + 27 \cdot (0 + 1i)}{8 \cdot (-1 + 0i) - 16\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)} = \frac{-64 + 27i}{-8 - (-16 + 16i)} = \frac{-64 + 27i}{8 - 16i} = \frac{(-64 + 27i) \cdot (8 + 16i)}{(8 - 16i) \cdot (8 + 16i)} = \\
&\quad \frac{(-64 \cdot 8 + 27 \cdot 16i^2) + (27 \cdot 8 - 64 \cdot 16)i}{8^2 - 16^2 i^2} = \frac{-944 - 808i}{320} = -\frac{59}{20} - \frac{101}{40}i
\end{aligned}$$

Cuestión 13.-

Escribir $Z_1 = 2 + 2i$ y $Z_2 = 6 - 6i$ en forma polar y calcular $\frac{Z_1}{Z_2}$ en forma polar y en forma binómica.

Solución.

El primer paso es pasar los números complejos a forma polar.

$$Z_1 = 2 + 2i \in 1^\circ \text{ Cuadrante: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Módulo: } r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} \\ \text{Argumento: } \alpha = \operatorname{arctg} \left| \frac{2}{2} \right| = \operatorname{arctg} 1 = 45^\circ \end{array} \right\} : Z_1 = \sqrt{8}_{45^\circ}$$

$$Z_2 = 6 - 6i \in 4^\circ \text{ Cuadrante: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Módulo: } r = \sqrt{6^2 + (-6)^2} = \sqrt{72} \\ \text{Argumento: } \alpha = 360^\circ - \operatorname{arctg} \left| \frac{-6}{6} \right| = 360^\circ - \operatorname{arctg} 1 = 315^\circ \end{array} \right\} : Z_2 = \sqrt{72}_{315^\circ}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sqrt{8}_{45^\circ}}{\sqrt{72}_{315^\circ}} = \left(\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{72}} \right)_{45^\circ - 315^\circ} = \sqrt{\frac{8}{72}}_{-270^\circ} = \sqrt{\frac{1}{9}}_{90^\circ} = \frac{1}{3}_{90^\circ} = \frac{1}{3} (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = 0 + \frac{1}{3}i = \frac{1}{3}i$$

Nota "El argumento de los números complejos en forma polar es conveniente dejarlo en positivo. Para expresar en positivo un argumento negativo se le suma 360° , si el argumento es menor de -360° , primero se divide por 360° y al resto, en negativo, se le suma 360° "

Cuestión 14.-

Calcular $(1+i)^{20}$. Expresar la solución en forma binómica.

Solución.

La forma más sencilla de hacer la potenciación de números complejos es en polar.

$$1 + i \in 1^\circ \text{ Cuadrante: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Módulo: } r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \text{Argumento: } \alpha = \operatorname{arctg} \left| \frac{1}{1} \right| = \operatorname{arctg} 1 = 45^\circ \end{array} \right\} : Z_1 = \sqrt{2}_{45^\circ}$$

$$(1+i)^{20} = \left(\sqrt{2}_{45^\circ}\right)^{20} = \left(\sqrt{2}\right)^{20 \times 45^\circ} = 2^{10}_{900^\circ} = 1024_{180^\circ + 360^\circ \times 2} = 1024_{180^\circ} =$$

$$= 1024 \cdot (\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = -1024 + 0i = -1024$$

Cuestión 15.-

Calcular las siguientes raíces

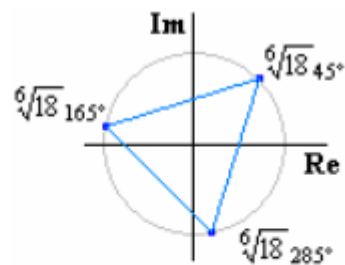
- a) $\sqrt[3]{-3+3i}$
- b) $\sqrt[5]{-1+\sqrt{3}i}$
- c) $\sqrt[6]{64}$
- d) $\sqrt[4]{-9}$
- e) $\sqrt[3]{i}$
- f) $\sqrt[4]{-16i}$
- g) $\sqrt[5]{-\sqrt{3}-i}$

Solución.

Las raíces de números complejos se hacen en forma polar, por lo que el primer paso será pasar el número complejo a forma polar.

$$\text{a) } \sqrt[3]{-3+3i} = \left\{ \begin{array}{l} -3+3i \in 2^\circ \text{ Cuadrante} : \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Módulo : } r = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} \\ \text{Argumento : } \alpha = 180 - \arctg\left|\frac{3}{-3}\right| = 135^\circ \end{array} \right\} \end{array} \right\} = \sqrt[3]{\sqrt{18}_{135^\circ}}$$

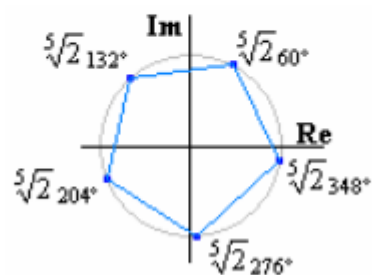
$$\sqrt[3]{\sqrt{18}_{135^\circ}} = \left\{ \begin{array}{l} = \sqrt[3]{\sqrt{18} \frac{135^\circ+360^\circ \cdot 0}{3}} = \sqrt[6]{18}_{45^\circ} \\ = \sqrt[3]{\sqrt{18} \frac{135^\circ+360^\circ \cdot 1}{3}} = \sqrt[6]{18}_{165^\circ} \\ = \sqrt[3]{\sqrt{18} \frac{135^\circ+360^\circ \cdot 2}{3}} = \sqrt[6]{18}_{285^\circ} \end{array} \right.$$



Los afijos de las soluciones de una raíz de un número complejo son los vértices de un polígono regular de tantos lados como indique el índice de la raíz

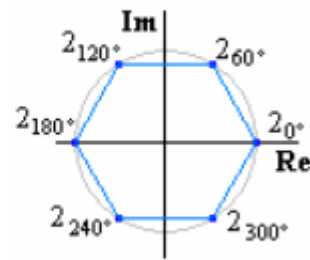
$$\text{b) } \sqrt[5]{-1-\sqrt{3}i} = \left\{ \begin{array}{l} 1-\sqrt{3}i \in 4^\circ \text{ Cuadrante} : \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Módulo : } r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \text{Argumento : } \alpha = 360 - \arctg\left|\frac{-\sqrt{3}}{1}\right| = 300^\circ \end{array} \right\} \end{array} \right\} = \sqrt[5]{2}_{300^\circ}$$

$$\sqrt[5]{2}_{300^\circ} = \left\{ \begin{array}{l} = \sqrt[5]{2} \frac{300^\circ+360^\circ \cdot 0}{5} = \sqrt[5]{2}_{60^\circ} \\ = \sqrt[5]{2} \frac{300^\circ+360^\circ \cdot 1}{5} = \sqrt[5]{2}_{132^\circ} \\ = \sqrt[5]{2} \frac{300^\circ+360^\circ \cdot 2}{5} = \sqrt[5]{2}_{204^\circ} \\ = \sqrt[5]{2} \frac{300^\circ+360^\circ \cdot 3}{5} = \sqrt[5]{2}_{276^\circ} \\ = \sqrt[5]{2} \frac{300^\circ+360^\circ \cdot 4}{5} = \sqrt[5]{2}_{348^\circ} \end{array} \right.$$



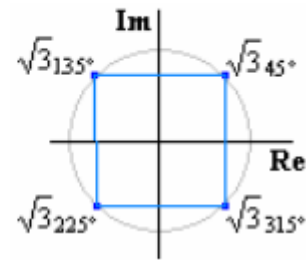
c) $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{64_0^\circ}$

$$\sqrt[6]{64_0^\circ} = \begin{cases} = \frac{\sqrt[6]{64} \cdot 0^\circ + 360^\circ \cdot 0}{6} = 2_0^\circ \\ = \frac{\sqrt[6]{64} \cdot 0^\circ + 360^\circ \cdot 1}{6} = 2_{60}^\circ \\ = \frac{\sqrt[6]{64} \cdot 0^\circ + 360^\circ \cdot 2}{6} = 2_{120}^\circ \\ = \frac{\sqrt[6]{64} \cdot 0^\circ + 360^\circ \cdot 3}{6} = 2_{180}^\circ \\ = \frac{\sqrt[6]{64} \cdot 0^\circ + 360^\circ \cdot 4}{6} = 2_{240}^\circ \\ = \frac{\sqrt[6]{64} \cdot 0^\circ + 360^\circ \cdot 5}{6} = 2_{300}^\circ \end{cases}$$



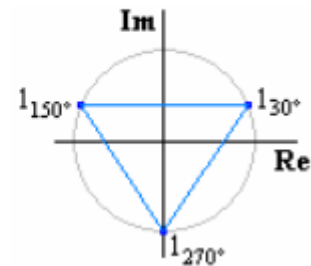
d) $\sqrt[4]{-9} = \sqrt[4]{9_{180}^\circ}$

$$\sqrt[4]{9_{180}^\circ} = \begin{cases} = \frac{\sqrt[4]{9} \cdot 180^\circ + 360^\circ \cdot 0}{4} = \sqrt{3}_{45}^\circ \\ = \frac{\sqrt[4]{9} \cdot 180^\circ + 360^\circ \cdot 1}{4} = \sqrt{3}_{135}^\circ \\ = \frac{\sqrt[4]{9} \cdot 180^\circ + 360^\circ \cdot 2}{4} = \sqrt{3}_{225}^\circ \\ = \frac{\sqrt[4]{9} \cdot 180^\circ + 360^\circ \cdot 3}{4} = \sqrt{3}_{315}^\circ \end{cases}$$



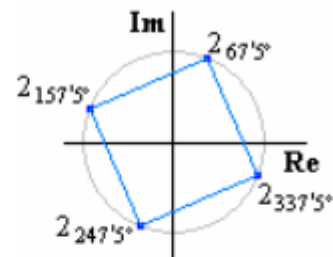
e) $\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{1_{90}^\circ}$

$$\sqrt[3]{1_{90}^\circ} = \begin{cases} = \frac{\sqrt[3]{1} \cdot 90^\circ + 360^\circ \cdot 0}{3} = 1_{30}^\circ \\ = \frac{\sqrt[3]{1} \cdot 90^\circ + 360^\circ \cdot 1}{3} = 1_{150}^\circ \\ = \frac{\sqrt[3]{1} \cdot 90^\circ + 360^\circ \cdot 2}{3} = 1_{270}^\circ \end{cases}$$



f) $\sqrt[4]{-16i} = \sqrt[4]{16_{270}^\circ}$

$$\sqrt[4]{16_{270}^\circ} = \begin{cases} = \frac{\sqrt[4]{16} \cdot 270^\circ + 360^\circ \cdot 0}{4} = 2_{67.5}^\circ \\ = \frac{\sqrt[4]{16} \cdot 270^\circ + 360^\circ \cdot 1}{4} = 2_{157.5}^\circ \\ = \frac{\sqrt[4]{16} \cdot 270^\circ + 360^\circ \cdot 2}{4} = 2_{247.5}^\circ \\ = \frac{\sqrt[4]{16} \cdot 270^\circ + 360^\circ \cdot 3}{4} = 2_{337.5}^\circ \end{cases}$$



g) $\sqrt[5]{-\sqrt{3}-i} = \begin{cases} -\sqrt{3}-i \in 3^\circ \text{ Cuadrante} : \left\{ \begin{array}{l} \text{Módulo : } r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \text{Argumento : } \alpha = 180 + \arctg\left|\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right| = 210^\circ \end{array} \right\} = \sqrt[5]{2_{210}^\circ} \end{cases}$

$$\sqrt[5]{2_{210}^\circ} = \begin{cases} \frac{\sqrt[5]{2} \cdot 210^\circ + 360^\circ \cdot 0}{5} = \sqrt[5]{2}_{42}^\circ \\ \frac{\sqrt[5]{2} \cdot 210^\circ + 360^\circ \cdot 1}{5} = \sqrt[5]{2}_{114}^\circ \\ \frac{\sqrt[5]{2} \cdot 210^\circ + 360^\circ \cdot 2}{5} = \sqrt[5]{2}_{186}^\circ \\ \frac{\sqrt[5]{2} \cdot 210^\circ + 360^\circ \cdot 3}{5} = \sqrt[5]{2}_{258}^\circ \\ \frac{\sqrt[5]{2} \cdot 210^\circ + 360^\circ \cdot 4}{5} = \sqrt[5]{2}_{330}^\circ \end{cases}$$



Cuestión 16.-

Hallar las raíces cuadradas de:

- a) 4
- b) -4
- c) 4i
- d) -4i

Solución.

$$a) \sqrt{4} = \pm 2 = \begin{cases} = 2 + 0i \\ = -2 + 0i \end{cases}$$

$$b) \sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = \pm 2i = \begin{cases} = 0 + 2i \\ = 0 - 2i \end{cases}$$

$$c) \sqrt{4i} = \sqrt{4_{90^\circ}} = \begin{cases} = \sqrt{4 \frac{90^\circ + 360 \cdot 0}{2}} = 2_{45^\circ} = 2 \cdot (\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i \\ = \sqrt{4 \frac{90^\circ + 360 \cdot 1}{2}} = 2_{225^\circ} = 2 \cdot (\cos 225^\circ + i \operatorname{sen} 225^\circ) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i \end{cases}$$

$$d) \sqrt{-4i} = \sqrt{4_{270^\circ}} = \begin{cases} = \sqrt{4 \frac{270^\circ + 360 \cdot 0}{2}} = 2_{135^\circ} = 2 \cdot (\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i \\ = \sqrt{4 \frac{270^\circ + 360 \cdot 1}{2}} = 2_{315^\circ} = 2 \cdot (\cos 315^\circ + i \operatorname{sen} 315^\circ) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i \end{cases}$$

Cuestión 17.-

Para escribir un número complejo ¿qué argumento debes poner en los siguientes casos?

- a) n° real positivo
- b) n° real negativo
- c) n° imaginario positivo
- d) n° imaginario negativo

Solución.

- a) $z = r_{0^\circ}$. El afijo está situado sobre el semieje real positivo.
- b) $z = r_{180^\circ}$. El afijo está situado sobre el semieje real negativo.
- c) $z = r_{90^\circ}$. El afijo está situado sobre el semieje imaginario positivo.
- d) $z = r_{270^\circ}$. El afijo está situado sobre el semieje imaginario negativo.

Cuestión 18.-

Dado un complejo en forma polar ¿Qué transformación sufre si se multiplica por i?

Solución.

Teniendo en cuenta que la forma polar de número i es 1_{90° , al multiplicar un número complejo de la forma r_α por I, el argumento se desplaza 90° .

$$r_\alpha \cdot 1_{90^\circ} = (r \cdot 1)_{\alpha + 90^\circ} = r_{\alpha + 90^\circ}$$

Cuestión 19.-

Calcular en forma polar: $(1 + \sqrt{3}i)^6 \cdot (-1 + i)^7$

Solución.

Lo primero es expresar los números complejos en polar, ya que las operaciones (producto y potencia) en esta forma son más sencillas.

$$1 + \sqrt{3}i \in 1^\circ \text{ Cuadrante: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Módulo: } r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \text{Argumento: } \alpha = \arctg \left| \frac{\sqrt{3}}{1} \right| = \arctg \sqrt{3} = 60^\circ \end{array} \right\} = 2_{60^\circ}$$

$$-1 + i \in 2^\circ \text{ Cuadrante: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Módulo: } r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \text{Argumento: } \alpha = 180 - \arctg \left| \frac{1}{-1} \right| = 135^\circ \end{array} \right\} = \sqrt{2}_{135^\circ}$$

El orden de operación es primero las potencias y segundo el producto.

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{3}i)^6 \cdot (-1 + i)^7 &= (2_{60^\circ})^6 \cdot (\sqrt{2}_{135^\circ})^7 = 2^{6 \times 60^\circ} \cdot (\sqrt{2})^7_{7 \times 135^\circ} = 64_{360^\circ} \cdot \sqrt{2}^7_{945^\circ} = \\ &= 64_{0^\circ} \cdot 2^3 \sqrt{2}_{2 \times 360^\circ + 225^\circ} = 64_{0^\circ} \cdot 8\sqrt{2}_{225^\circ} = (64 \cdot 8\sqrt{2})_{0^\circ + 225^\circ} = 512\sqrt{2}_{225^\circ} \end{aligned}$$

Cuestión 20.-

Calcular: $\frac{i^7 - i^{-7}}{2i}$

Solución.

Lo primero será operar las potencias de i teniendo en cuenta su periodicidad.

$$i^7 = i^{4+3} = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$$

$$i^{-7} = i^{-1(4+3)} = (i^4 \cdot i^3)^{-1} = (1 \cdot (-i))^{-1} = (-i)^{-1} = \frac{1}{-i} = \frac{1 \cdot i}{-i \cdot i} = \frac{i}{-i^2} = \frac{i}{-(-1)} = i$$

$$\frac{i^7 - i^{-7}}{2i} = \frac{-i - i}{2i} = \frac{-2i}{2i} = -1 = -1 + 0i$$

Cuestión 21.-

Dado el número complejo $z = \frac{1+i^7}{1+i}$ calcular la expresión trigonométrica del $n^\circ \bar{z}$.

Solución.

Lo primero será operar las potencias de i teniendo en cuenta su periodicidad.

$$i^7 = i^{4+3} = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$$

$$z = \frac{1+i^7}{1+i} = \frac{1-i}{1+i}$$

Lo más sencillo es trabajar en forma polar.

$$1 + i \in 1^\circ \text{ Cuadrante: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Módulo: } r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \text{Argumento: } \alpha = \arctg \left| \frac{1}{1} \right| = \arctg 1 = 45^\circ \end{array} \right\} = \sqrt{2}_{45^\circ}$$

$$1-i \in 4^{\circ} \text{ Cuadrante: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Módulo: } r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ \text{Argumento: } \alpha = 360^{\circ} - \arctg \left| \frac{-1}{1} \right| = 360^{\circ} - \arctg 1 = 315^{\circ} \end{array} \right\} = \sqrt{2}_{315^{\circ}}$$

$$z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{\sqrt{2}_{45^{\circ}}}{\sqrt{2}_{315^{\circ}}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right)_{45^{\circ}-315^{\circ}} = 1_{-270^{\circ}} = 1_{90^{\circ}}$$

$$\text{Si } z = 1_{90^{\circ}} \Rightarrow \bar{z} = 1_{-90^{\circ}} = 1_{270^{\circ}} = 1 \cdot (\cos 270^{\circ} + i \sin 270^{\circ})$$

Cuestión 22.-

Sea $z = 10\sqrt{3} - 10i$. Calcular z^5 , $\sqrt[4]{z}$

Solución.

Lo primero es expresar el número complejo en polar, ya que las operaciones (potencia y radicación) en esta forma son más sencillas.

$$10\sqrt{3} - 10i \in 4^{\circ} \text{ Cuadrante: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Módulo: } r = \sqrt{(10\sqrt{3})^2 + (-10)^2} = \sqrt{400} = 20 \\ \text{Argumento: } \alpha = 360^{\circ} - \arctg \left| \frac{-10}{10\sqrt{3}} \right| = 360^{\circ} - \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = 330^{\circ} \end{array} \right\} = 20_{330^{\circ}}$$

$$z^5 = (20_{330^{\circ}})^5 = 20^5_{5 \times 330^{\circ}} = 32 \times 10^5_{1650^{\circ}} = 32 \times 10^5_{4 \times 360^{\circ} + 210^{\circ}} = 32 \times 10^5_{210^{\circ}}$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{20_{330^{\circ}}} = \begin{cases} = \sqrt[4]{20_{\frac{330^{\circ} + 360^{\circ} \cdot 0}{4}}} = \sqrt[4]{20}_{82.5^{\circ}} \\ = \sqrt[4]{20_{\frac{330^{\circ} + 360^{\circ} \cdot 1}{4}}} = \sqrt[4]{20}_{172.5^{\circ}} \\ = \sqrt[4]{20_{\frac{330^{\circ} + 360^{\circ} \cdot 2}{4}}} = \sqrt[4]{20}_{262.5^{\circ}} \\ = \sqrt[4]{20_{\frac{330^{\circ} + 360^{\circ} \cdot 3}{4}}} = \sqrt[4]{20}_{352.5^{\circ}} \end{cases}$$

Cuestión 23.-

Calcular los valores de z que verifican: $(1+i)z^3 - 2i = 0$

Solución.

De la ecuación propuesta despejamos z .

$$(1+i)z^3 - 2i = 0 \quad (1+i)z^3 = 2i \quad z^3 = \frac{2i}{1+i} \quad z = \sqrt[3]{\frac{2i}{1+i}}$$

Para calcular z la mejor forma es operar en forma polar.

$2i = 2_{90^{\circ}}$ Imaginario puro positivo

$$1+i \in 1^{\circ} \text{ Cuadrante: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Módulo: } r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \text{Argumento: } \alpha = \arctg \left| \frac{1}{1} \right| = \arctg 1 = 45^{\circ} \end{array} \right\} = \sqrt{2}_{45^{\circ}}$$

Sustituimos y operamos, primero el cociente y luego la raíz.

$$z = \sqrt[3]{\frac{2i}{1+i}} = \sqrt[3]{\frac{2_{90^\circ}}{\sqrt{2}_{45^\circ}}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)_{90^\circ-45^\circ}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{45^\circ}} = \begin{cases} = \sqrt[3]{\sqrt{2} \frac{34^\circ+360 \cdot 0}{3}} = \sqrt[6]{2}_{15^\circ} \\ = \sqrt[3]{\sqrt{2} \frac{34^\circ+360 \cdot 1}{3}} = \sqrt[6]{2}_{135^\circ} \\ = \sqrt[3]{\sqrt{2} \frac{34^\circ+360 \cdot 2}{3}} = \sqrt[6]{2}_{255^\circ} \end{cases}$$

Cuestión 24.-

Encontrar las ecuaciones de 2º grado cuyas raíces son: $\sqrt{2}_{45^\circ}$, $\sqrt{2}_{315^\circ}$

Solución.

Expresamos los números en forma binómico.

$$\sqrt{2}_{45^\circ} = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1+i$$

$$\sqrt{2}_{315^\circ} = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1-i$$

La ecuación de 2º grado será:

$$(x - (1+i)) \cdot (x - (1-i)) = 0$$

Operando, simplificando y ordenando se obtiene la ecuación.

$$(x - (1+i)) \cdot (x - (1-i)) = x^2 - x(1-i) - x(1+i) + (1+i)(1-i) = x^2 - x + xi - x - xi + 1^2 - i^2 = x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$