# *UNIDAD 6*: **PROPIEDADES GLOBALES DE LAS FUNCIONES**

1. **EXPRESIÓN DE UNA FUNCIÓN**

- *Expresión mediante una tabla de valores*

La tabla de valores de una función está formada por dos filas o columnas. En la primera fila o columna figuran los valores que toma la variable y en la segunda fila o columna están los valores correspondientes que toma la variable dependiente

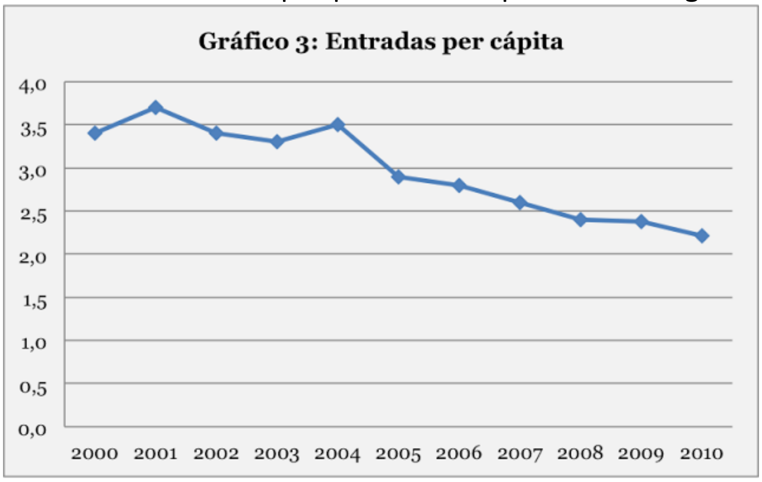
*Ejemplo*: Tabla de valores de la función que nos da los precios de la tarifa doméstica de la luz en los años que se indican:

| Años (variable independiente) | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Precio luz (€/MWH) | 118,2 | 107,7 | 102,4 | 99,7 | 96,7 | 96,7 | 97,1 | 97,1 | 98,1 |

- *Expresión mediante una gráfica*

Las gráficas nos dan una visión cualitativa de las funciones sobre unos ejes coordenados

*Ejemplo*: Función que nos da las entradas de cine por persona compradas a lo largo de un año.




- *Expresión mediante una fórmula matemática o expresión algebraica*

La expresión algebraica o fórmula matemática permite calcular los valores de la variable dependiente para todos los valores que demos a la variable independiente. Se dice que la función viene dada por un criterio o fórmula.

*Ejemplo*: El área de un cuadrado de lado $l$ viene dado por la función $Área(l) = l^2$

- *Expresión mediante la descripción verbal*

La descripción verbal nos proporciona una visión descriptiva y cualitativa de la relación funcional

*Ejemplo*: La función que liga el precio que hemos de pagar al frutero en función de la cantidad de manzanas que compremos, sabiendo que el kilogramo cuesta 0,80 €

Esta función la podemos fácilmente transformar en una expresión como sigue:

$f(x) = 0{,}80 \cdot x$ donde $x =$ nº de kilogramos de manzanas

## 2. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL. DOMINIO Y RECORRIDO

La relación existente entre dos magnitudes que pueden expresarse en las formas vistas en el apartado anterior recibe el nombre de **función**.

Una función real de variable real es una aplicación de un subconjunto de los nº reales ($\mathbb{R}$) en otro subconjunto de $\mathbb{R}$.

Se representa de la siguiente forma: $\begin{array}{c} f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \in D \to y = f(x) \end{array}$ Una "*x*" tiene una sola imagen, pero una "*y*" puede tener varias *x* que vayan a ella.

Al conjunto D se le llama dominio de definición (o simplemente dominio) de la función $y = f(x)$, y suele ser el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ donde la función $f$ tiene sentido. Se representa por $Dom(f)$

A "*x*" se le llama variable independiente, y representa a los valores a los que se aplica $f$

A "*y*" se le llama variable dependiente, y representa a los valores que se obtienen de aplicar $f$

Al conjunto de todos los valores que se obtienen aplicando $f$ a todos los valores del dominio se le llama conjunto imagen o recorrido. Se representa por $\text{Im}(f)$ o por $\text{Recorr}(f)$

Se denomina gráfica o grafo de una función $y = f(x)$ al conjunto de puntos del plano de la forma $(x, f(x))$ con $x \in Dom(f)$

Ejemplos de funciones:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $f(x) = x^2 + 1$ | $y = e^x$ | $f(x) = \dfrac{1}{x}$ | $g(x) = \sqrt{x-1}$ | $f(x) = \begin{cases} x+2 & si \quad x \le 1 \\ 3x+2 & si \quad x > 1 \end{cases}$ |

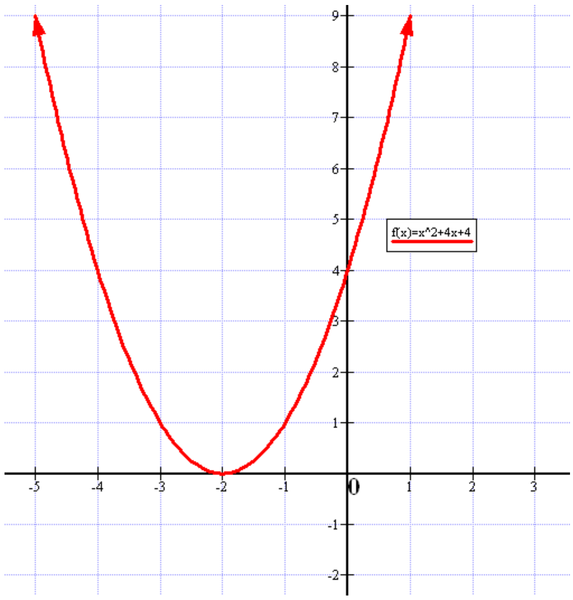
**Ejemplo 1**: Sea la función polinómica cuadrática siguiente:

$$\begin{array}{c} f: D \subseteq R \to R \\ x \in D \to y = f(x) = x^2 + 4x + 4 \end{array}$$

De forma reducida nos darán de manera habitual la función sólo mediante su criterio o fórmula. En este caso como:
$f(x) = x^2 + 4x + 4$ ó $y = x^2 + 4x + 4$

Todas las funciones polinómicas tiene por dominio todos los nº reales, salvo que explícitamente nos hagan una restricción, que no es el caso.

Así, $Dom(f) = \mathbb{R}$




El conjunto imagen o recorrido es más difícil de calcular, pues nos hace falta dibujar la función, obteniendo su gráfica, que en este caso es una parábola (ya veremos cómo se dibuja su gráfica en la unidad siguiente). Os saldrá un dibujo como el de la izquierda.

La imagen la miramos en el eje de ordenadas o eje OY (como si comprimiésemos el dibujo de la función sobre el eje OY) y obtenemos: $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$

*Clasificación de las funciones según su criterio o fórmula*

- *Funciones*
  - Algebraicas
    - *Racionales*
      - *Polinómicas*
        - Constantes $\rightarrow$ Ej: $f(x) = -6$
        - Afines y lineales $\rightarrow$ Ej: $f(x) = 2x - 4$
        - Cuadráticas $\rightarrow$ Ej: $f(x) = 3x^2 + x - 5$
        - De grado superior a 2 $\rightarrow$ Ej: $f(x) = x^3 - x^2$
      - *Fraccionarias*: Su criterio o fórmula es una fracción con x en el denominador $\rightarrow$ Ej: $f(x) = \dfrac{2}{x+5}$
    - *Irracionales*: Son aquellas funciones donde la variable independiente, x, aparece dentro de un signo radical $\rightarrow$ Ej: $f(x) = \sqrt{2x+3}$
  - *Trascendentes*
    - *Trigonométricas*: Aparece alguna función *trigonométrica* Ej: $f(x) = sen(x) + \cos(x) + 6$
    - *Exponenciales*: La variable "x" está en el exponente Ej: $f(x) = 5^{-3x}$
    - *Logarítmicas*: Aparece la "x" como argumento de algún logaritmo Ej: $f(x) = -4x + \ln(x)$

*CÁLCULO DE DOMINIOS MEDIANTE LA FÓRMULA O CRITERIO*

Dependiendo del criterio o fórmula de la función actuaremos de una forma u otra para calcular el dominio, atendiendo a las siguientes instrucciones, basadas en que no se puede dividir por 0, no se pueden obtener raíces de índice par de radicandos negativos, no existen logaritmos de números negativos:

- *Funciones polinómicas*: Su dominio es todo R, pues al ser el criterio un polinomio nunca habrá problemas. Ejemplos:

| | | |
|---|---|---|
| $f(x) = x^4 - x^2$ <br> Dom( $f$ ) = $\mathbb{R}$ | $y = -x^2 + 1$ <br> Dom( $f$ ) = $\mathbb{R}$ | $y = -1$ <br> Dom( $y$ ) = $\mathbb{R}$ |

- *Funciones fraccionarias*: Son de la forma $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Su dominio son todos aquellos nº reales que no anulan el denominador. Matemáticamente lo expresamos de la siguiente manera: $Dom(y)=\{x\in\mathbb{R}\ /\ Q(x)\neq 0\}$ (esto se lee así, "todos los nº reales tales que el polinomio denominador $Q(x)$ no vale 0"

Ejemplos:

a) $y=\dfrac{1}{x}$, que es una hipérbola equilátera. Tenemos que $Dom(y)$ = $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

b) $f(x)=\dfrac{x-5}{x^2-3x}$ Vamos a calcular su dominio, $Dom(f)=\{x\in\mathbb{R}\setminus x^2-3x\neq 0\}$

Vemos dónde se anula el denominador: $x^2-3x=0\rightarrow \begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}$ Por tanto, $Dom(f)=$ $\mathbb{R}\setminus\{0, 3\}$

- *Funciones irracionales*: Son del tipo $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$
  - Si el índice del radical es impar (n es impar), entonces el dominio de la función f coincide con el dominio de la función g
  - Si el índice del radical es par (n es par), entonces el dominio será el conjunto de los nº reales tales que $g(x)\geq 0$

Ejemplos:

a) Calcular el dominio de $y=\sqrt[3]{2x-1}$. Como se trata de una función irracional de índice impar (3), nos fijamos en el radicando, y como se trata de una polinómica de primer grado (afín) su dominio será $\mathbb{R}$

$Dom(y)=\mathbb{R}$

b) Calcular el dominio de $f(x)=\sqrt[5]{\dfrac{2}{x^2-9}}$ Por ser de índice impar (5), nos fijamos en el radicando, que es una fracción algebraica. Debemos descartar para el dominio los valores que anulan el denominador

$x^2-9=0\rightarrow \begin{array}{l}x=3\\x=-3\end{array}\rightarrow Dom(f)=\mathbb{R}\setminus\{3,-3\}$

c) Calcular el dominio de $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x^2-9}}$ Por ser de índice par, vamos a hacer una tabla de signos para conocer donde el radicando es $\geq 0$. Veamos primero donde el numerador y el denominador del radicando se anulan.

$\begin{array}{l}x-1=0\\x^2-9=0\end{array}\rightarrow \begin{array}{l}x=1\\x=3\\x=-3\end{array}$ Con estos tres valores dividimos la recta real en 4 intervalos abiertos y construimos la tabla de signos:

| | $(-\infty,-3)$ | (-3,1) | (1,3) | $(3,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| x-1 | - | - | + | + |
| $x^2$-9 | + | - | - | + |
| | **-** | **+** | **-** | **+** |

De donde deducimos que $Dom(f)=(-3,1]\cup(3,+\infty)$. Fijaos que el 1 es cerrado pues anula el numerador del radicando y tiene sentido (tendríamos una raíz cuarta de 0, que es 0), mientras que –3 y 3 van abiertos pues anulan el denominador y no tienen sentido (dividiríamos por 0)

- *Funciones trigonométricas*:
  Las de tipo y = sen(g(x)) ó y = cos(g(x)) tienen por dominio el dominio de g(x)

  Las de tipo y = tg(g(x)) tienen por dominio: $Dom(tg(g(x))=\{x\in\mathbb{R}\mid g(x)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ con $k\in Z\}$

  Ejemplo: Calcular el dominio de $f(x)=sen\left(\sqrt{\frac{x-2}{x+3}}\right)$ Os dejo la solución y practicad vosotros

  $$Dom(f)=(-\infty,-3)\cup[2,+\infty)$$

- *Funciones exponenciales*:
  Las exponenciales $f(x)=a^{g(x)}$ tienen por dominio el mismo que el de la función exponente

  Ejemplos:

  a) $y=3^{\frac{2}{2x-1}}\rightarrow Dom(y)=\mathbb{R}-\{\frac{1}{2}\}$

  b) $f(x)=e^{\sqrt{x}}+2\rightarrow Dom(f)=[0,+\infty)$

- *Funciones logarítmicas*:
  El dominio de estas funciones, $f(x)=\log_a(g(x))$ son los nº reales tales que hacen $g(x)>0$

  Ejemplo: $f(x)=\ln(1-x^2)$ Matemáticamente tenemos que calcular $Dom(f)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,1-x^2>0\}$

  Resolvemos $1-x^2=0\rightarrow\begin{matrix}x=1\\x=-1\end{matrix}$ y ahora hacemos la tabla de signos

| | $(-\infty,-1)$ | (-1,1) | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $1-x^2$ | - | + | - |

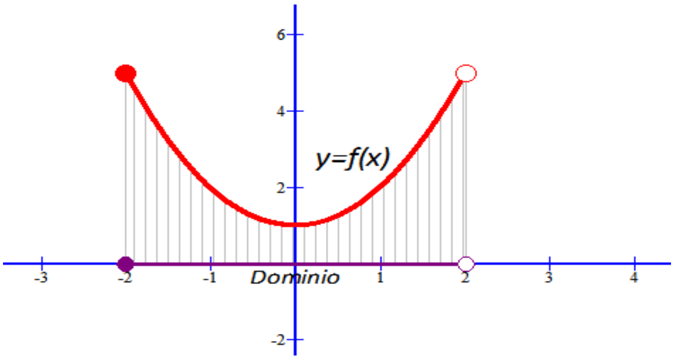
Por tanto, $Dom(f)=(-1,1)$. Observad que 1 y –1 son abiertos pues $\ln 0$ no tiene sentido

*CÁLCULO DE DOMINIOS MEDIANTE LA GRÁFICA*

El dominio de la función viene dado por el conjunto de valores del eje de abscisas o eje OX para los cuales la función existe. Veamos unos ejemplos:

*Ejemplo*: Calcular el dominio de las siguientes funciones dadas por sus gráficas:

a)

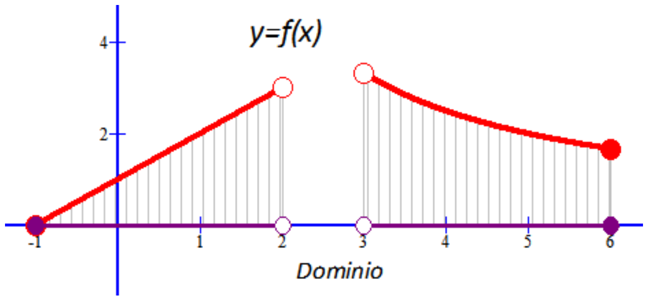



El dominio de esta función es la parte del eje OX que tienen correspondientes valores de la gráfica (existe f(x)).

Por tanto,

$$Dom(f) = [-2,2)$$

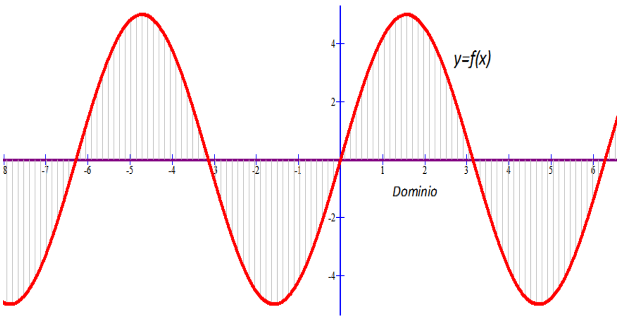
b)




En este caso tenemos que:

$$Dom(f) = [-1,2) \cup (3,6]$$

c)




En este caso tenemos que:

$$Dom(f) = \mathbb{R}$$

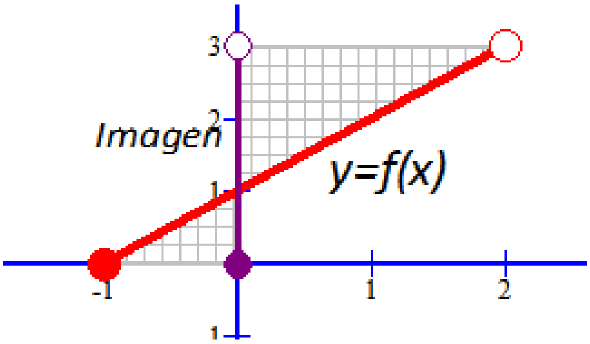
*CÁLCULO DE LA IMAGEN O RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN MEDIANTE LA GRÁFICA*

Sólo calcularemos imágenes o recorridos de funciones mediante gráficas.

El recorrido de una función viene dado por el conjunto de valores del eje de ordenadas o eje OY que son alcanzados por la función.

*Ejemplo*: Calcular el recorrido de las siguientes funciones dadas por sus gráficas:

a)

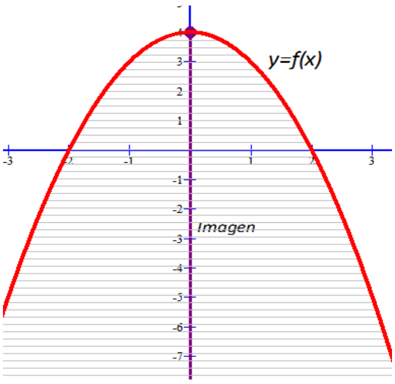



El recorrido de esta función es la parte del eje OY que tienen correspondientes valores de la gráfica (existe f(x)).

Por tanto,

$$\operatorname{Re}corr(f) = [0,3)$$

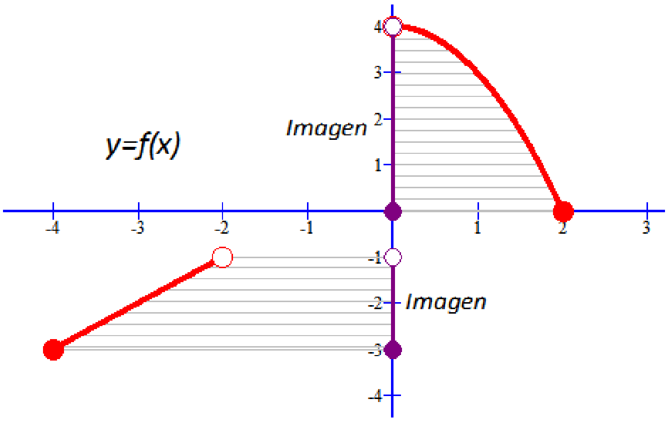
b)




En este caso tenemos que:

$$\operatorname{Im}(f) = (-\infty,4]$$

c)




En este caso tenemos que:

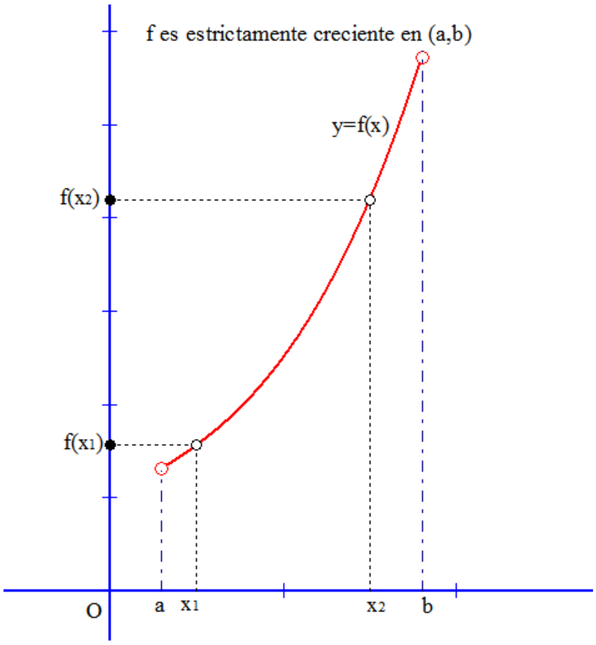
$$\operatorname{Im}(f) = [-3,-1) \bigcup [0,4)$$

## 3. MONOTONÍA

*Definición*: Una función $y = f(x)$ es estrictamente creciente en un intervalo $(a,b)$ si para cualquier par de valores del intervalo, $x_1$ y $x_2$, con $x_1 < x_2$, se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$. Matemáticamente lo podemos escribir así:

$y = f(x)$ es estrictamente creciente en un intervalo $(a,b) \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in (a,b)$ tal que $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

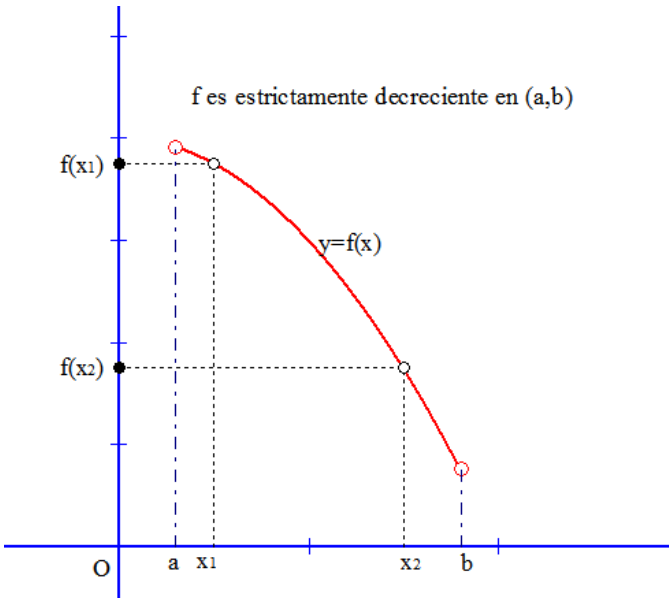
Gráficamente lo vemos así:




*Definición*: Una función $y = f(x)$ es estrictamente decreciente en un intervalo $(a,b)$ si para cualquier par de valores del intervalo, $x_1$ y $x_2$, con $x_1 < x_2$, se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$. Matemáticamente lo podemos escribir así:

$y = f(x)$ es estrictamente decreciente en un intervalo $(a,b) \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in (a,b)$ tal que $x_1 < x_2 \Rightarrow$ $f(x_1) > f(x_2)$

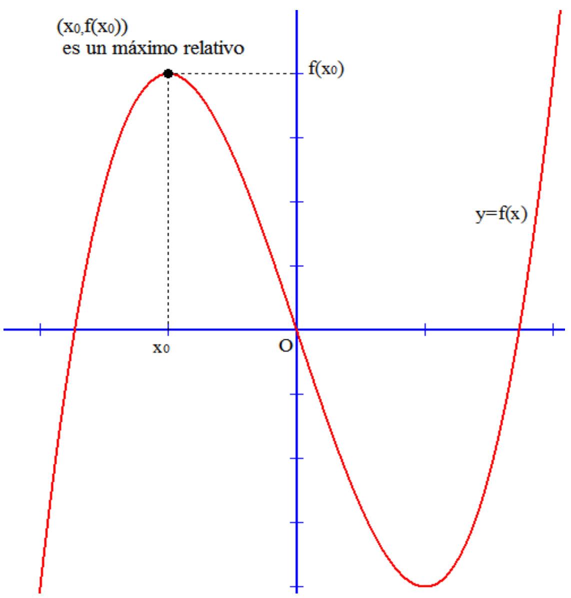
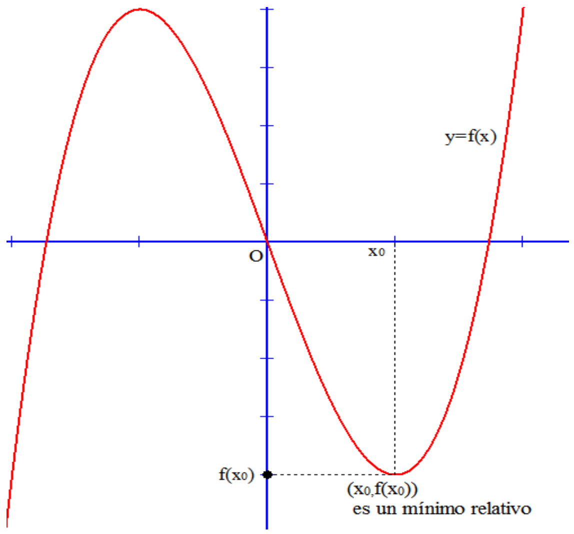
Gráficamente lo vemos así:



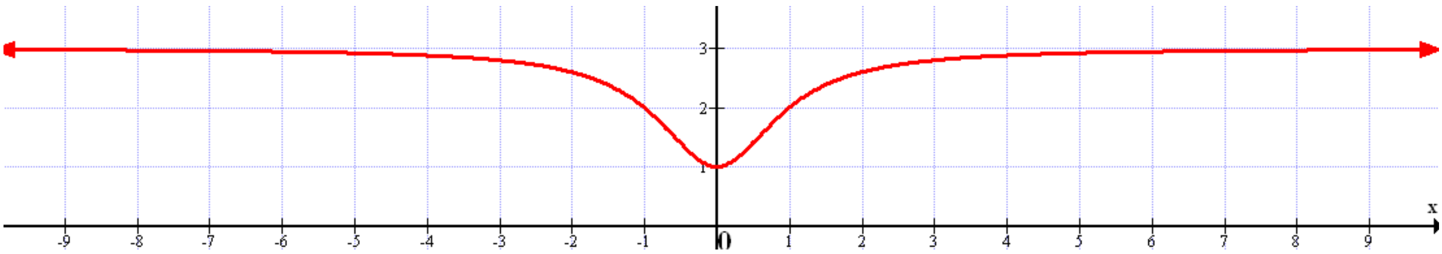

## 4. EXTREMOS RELATIVOS

*Definición*: Una función $y = f(x)$ tiene un máximo relativo en un punto de abscisa $x_0$, si hay un intervalo abierto que contiene a $x_0$, donde $f(x_0)$ es el mayor valor que alcanza la función.

*Definición*: Una función $y = f(x)$ tiene un mínimo relativo en un punto de abscisa $x_0$, si hay un intervalo abierto que contiene a $x_0$, donde $f(x_0)$ es el menor valor que alcanza la función.

| MÁXIMO RELATIVO | MÍNIMO RELATIVO |
|---|---|
|   |   |

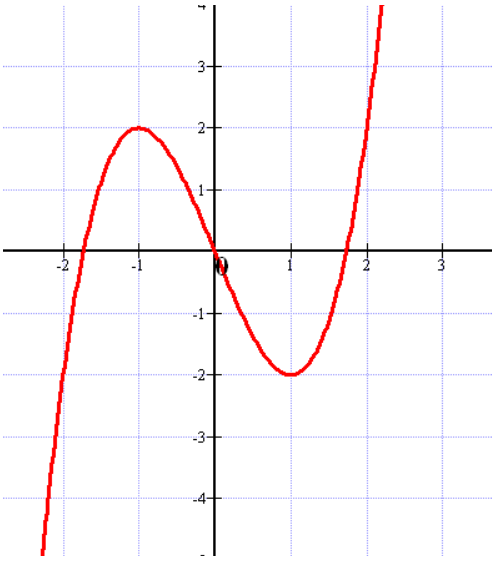
*Ejemplo*: Supongamos que tenemos una función cuya gráfica es como sigue:




Viendo el dibujo podemos decir que:

- En $(-\infty,0)$, la función es estrictamente decreciente (se puede decir decreciente)
- En $(0,+\infty)$, la función es estrictamente creciente(se puede decir creciente)
- En $x_0 = 0$ (ó mejor dicho en el punto (0,1)) , la función presenta un mínimo relativo
- No tiene máximos relativos
- Su dominio es todo IR
- Su imagen es $[1,3)$

*Ejemplo*: Lo mismo para



$f$ es creciente en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

$f$ es decreciente en $(-1,1)$

$f$ tiene un máx. relativo en $x_0 = -1$ . También se puede decir que tiene un máximo relativo en (-1,2)

$f$ tiene un mín. relativo en $x_0 = 1$. También se puede decir que tiene un mínimo relativo en (1,-2)

Su dominio es todo $\mathbb{R}$

Su imagen es todo $\mathbb{R}$

## 5. FUNCIONES ACOTADAS. EXTREMOS ABSOLUTOS

*Definición*.- Una función $y = f(x)$ está acotada superiormente por un nº real K si todos los valores que toma la función son menores o iguales que K, es decir, $f(x) \leq K \quad \forall x \in Dom(f)$ (NOTA: $\forall$ = para todo)

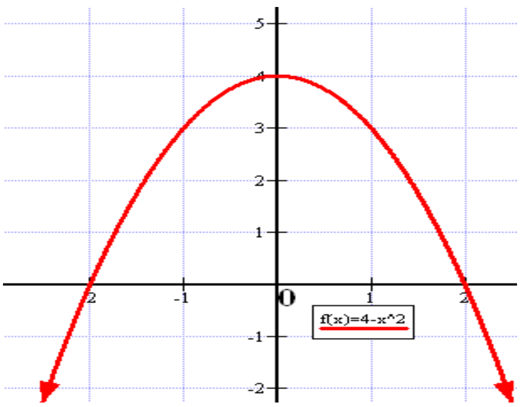
A K se le llama cota superior.

*Definición*.- Una función $y = f(x)$ está acotada inferiormente por un nº real P si todos los valores que toma la función son mayores o iguales que K, es decir, $f(x) \geq P \quad \forall x \in Dom(f)$

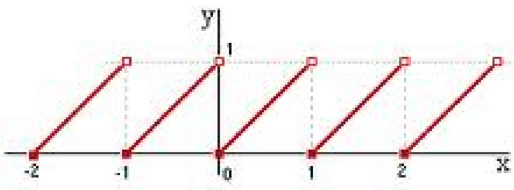
A P se le llama cota inferior

*Definición*.- Una función $y = f(x)$ está acotada si lo está superior e inferiormente, es decir, $P \leq f(x) \leq K$ $\forall x \in Dom(f)$

*Ejemplo*: La función $f(x) = 4 - x^2$ está acotada superiormente por 4 (ó 5 ó 6 ó ...) pero no está acotada inferiormente



*Ejemplo*: La función de la gráfica está acotada. Por ejemplo, tiene como cota superior 1 (o cualquier otro nº mayor que 1) y como una cota inferior 0 (o cualquier otro nº menor que 0)



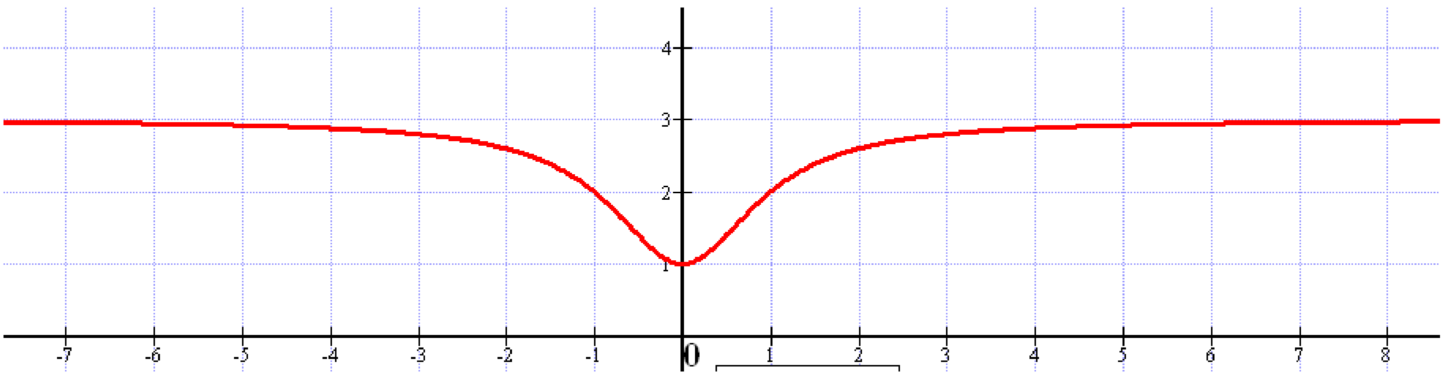

*Definición*.- Se llama **extremo superior o supremo** a la menor de las cotas superiores de una función acotada superiormente

*Definición*.- Se llama **máximo absoluto** de una función acotada superiormente al extremo superior o supremo cuando es alcanzado por la función

*Definición*.- Se llama **extremo inferior o ínfimo** a la mayor de las cotas inferiores de una función acotada inferiormente

*Definición*.- Se llama **mínimo absoluto** de una función acotada inferiormente al extremo inferior o ínfimo cuando es alcanzado por la función

*Ejemplo*: Dada la siguiente gráfica




Podemos observar que es una función acotada.

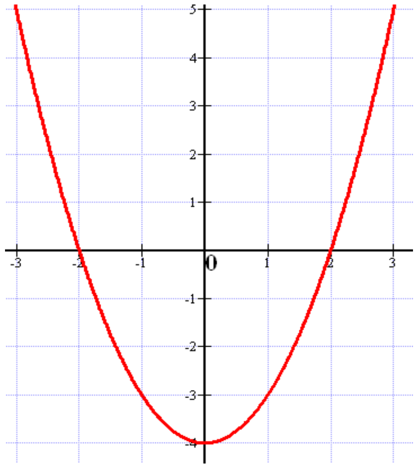
La menor de las cotas superiores es 3 (3 es el extremo superior o supremo) pero la función no lo alcanza, luego no tiene máximo absoluto

La mayor de las cotas inferiores es 1 (1 es el extremo inferior o ínfimo) y además lo alcanza es el mínimo absoluto. Del mínimo absoluto podemos decir que es el punto (0,1), que lo alcanza en x = 0 o bien que es 1. Nosotros habitualmente usaremos las dos primeras expresiones.

## 6. FUNCIONES SIMÉTRICAS

*Definición*.- Una función y = f(x) se dice **simétrica respecto del eje de ordenadas o eje OY** o que tiene **simetría par** si f(-x) = f(x) para cualquier x del Dom(f)

**Ejemplo 7**: La función $f(x) = x^2 - 4$ es par como vemos por su representación gráfica.

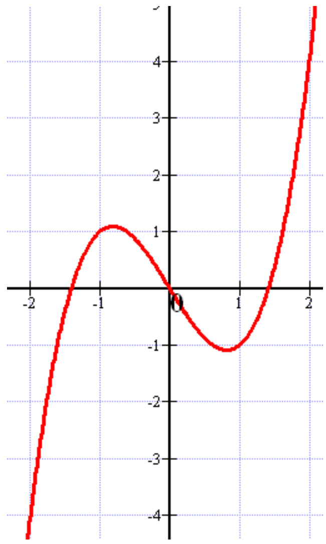


Matemáticamente demostramos que es par haciendo lo siguiente: $f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f(x)$

*Definición*: Una función y = f(x) es **simétrica respecto del origen de coordenadas** o que tiene **simetría impar** si

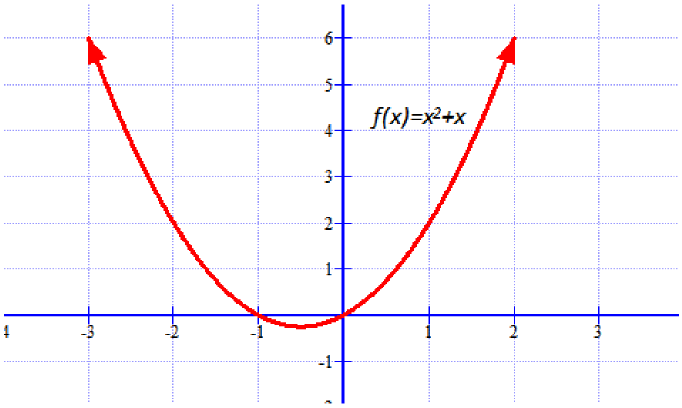
f(-x) = - f(x)

**Ejemplo 8**.- La función $f(x) = x^3 - 2x$ es impar como vemos por su representación gráfica



Matemáticamente demostramos que es impar haciendo lo siguiente:
$f(-x) = (-x)^3 - 2\cdot(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x) = -f(x)$

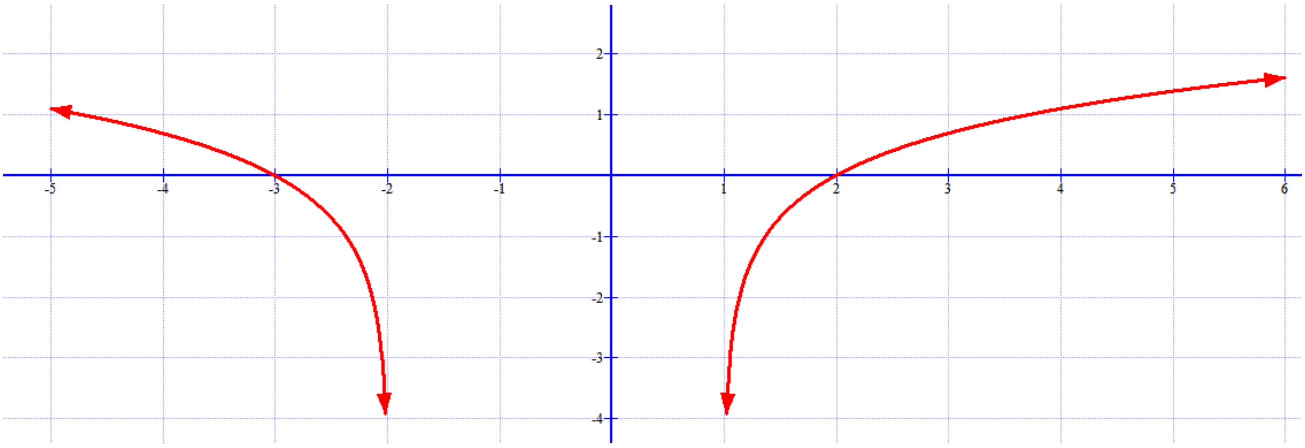
*Ejemplo*: La función $f(x) = x^2 + x$ no tiene simetría, no es par ni impar




Matemáticamente lo demostramos pues: $f(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x \neq \begin{cases} f(x)=x^2+x \\ -f(x)=-x^2-x \end{cases}$

**Propiedad**: Para que una función pueda ser simétrica (par o impar) su dominio ha de ser simétrico respecto al origen de coordenadas

*Ejemplo*: La función dada por la gráfica siguiente no es simétrica pues su dominio es $Dom(f)=(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

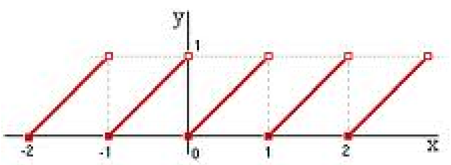


## 7. FUNCIONES PERIÓDICAS

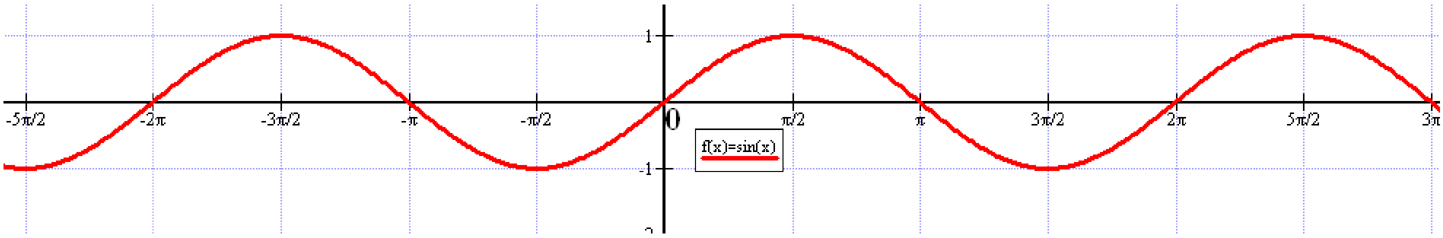
Son funciones que se van repitiendo a lo largo del eje OX

*Definición*: Una función $y=f(x)$ es **periódica de periodo T** (T positivo), si cumple que $f(x+kT)=f(x)$ para cualquier valor de $x\in Dom(f)$

**Ejemplo 10**: La función parte decimal Dec(x) = x – E(x) es periódica de periodo 1



**Ejemplo 11**: La función $f(x)=senx$ es periódica de periodo $2\pi$




## 8. ASÍNTOTAS. RAMAS INFINITAS

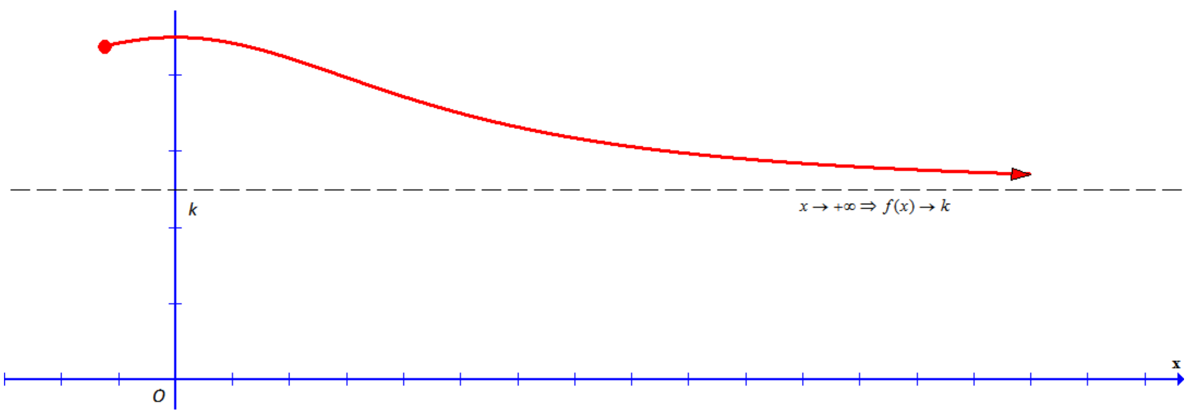
TENDENCIA DE UNA FUNCIÓN HACIA UN VALOR CONSTANTE CUANDO *x* TIENDE A $\pm\infty$

Una función **tiende hacia un valor constante *k*** cuando al aumentar o disminuir los valores de la variable independiente, los correspondientes valores de la variable dependiente se van aproximando al valor constante k.

Este comportamiento se expresa de las siguientes formas:

- Cuando *x* tiende a más infinito, $y = f(x)$ tiende a *k*. Matemáticamente lo expresamos así: $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to k$

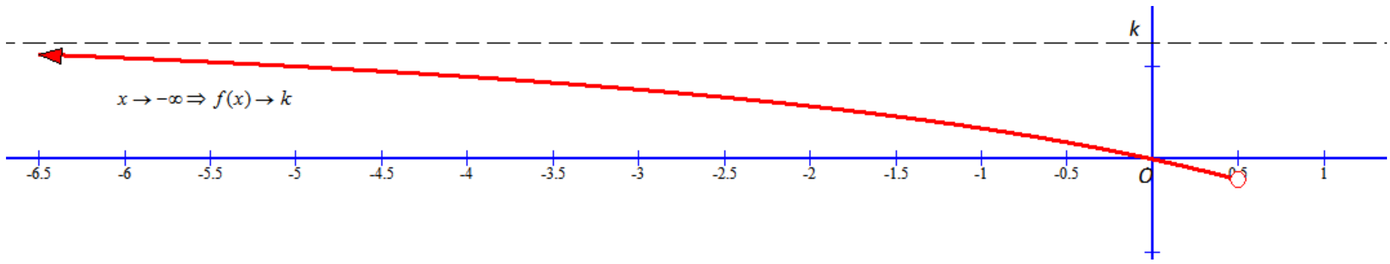
  Gráficamente sería de esta manera:




Diremos que la recta $y = k$ es una ***asíntota horizontal*** en $+\infty$ de la función $y = f(x)$

- Cuando *x* tiende a menos infinito, $y = f(x)$ tiende a *k*. Matemáticamente lo expresamos así: $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to k$

  Gráficamente sería de esta manera:



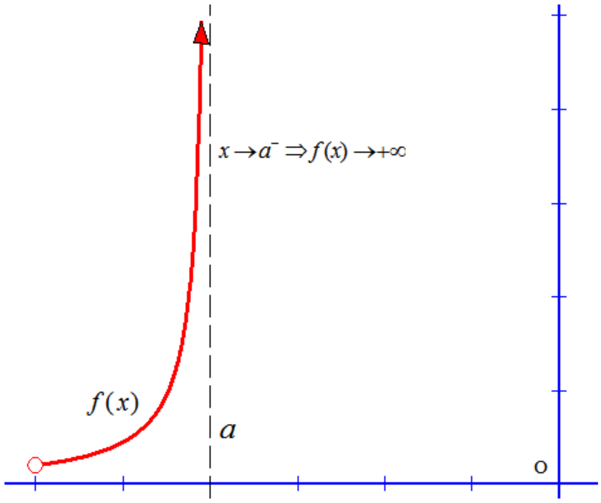

Diremos que la recta $y = k$ es una ***asíntota horizontal*** en $-\infty$ de la función $y = f(x)$

En la tendencia de una función a más o menos infinito cuando *x* tiende a un valor constante *a* pueden darse los siguientes casos:

- Si *x* tiende a “*a*” por la izquierda y entonces $f(x)$ tiende a más infinito. Matemáticamente lo expresamos así:

  $x \to a^- \Rightarrow f(x) \to +\infty$

  Gráficamente sería de esta manera:

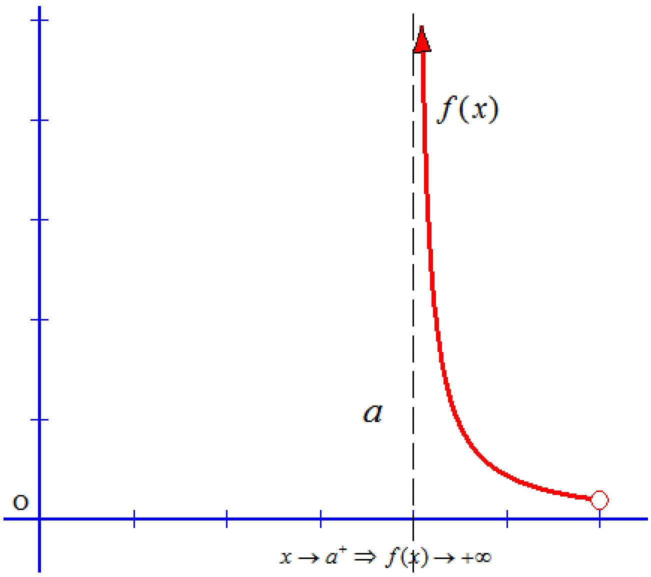



Diremos que la recta $x = a$ es una ***asíntota vertical*** por la izquierda de la función $y = f(x)$ hacia $+\infty$

- Si *x* tiende a “*a*” por la derecha y entonces $f(x)$ tiende a más infinito. Matemáticamente lo expresamos así:

  $x \to a^+ \Rightarrow f(x) \to +\infty$

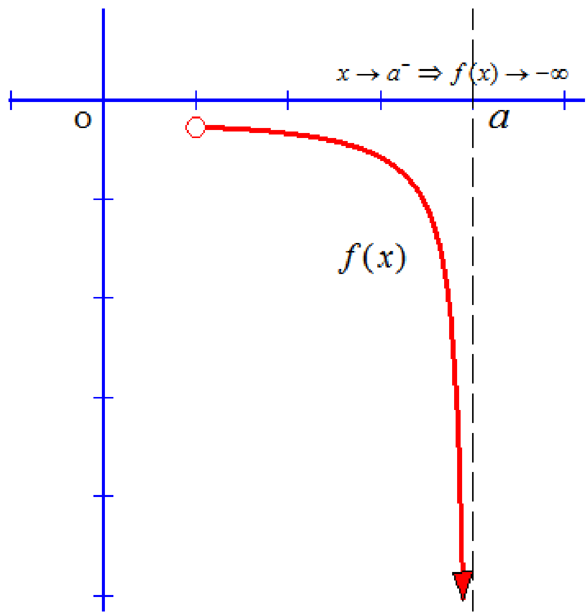
  Gráficamente sería de esta manera:




Diremos que la recta $x = a$ es una ***asíntota vertical*** por la derecha de la función $y = f(x)$ hacia $+\infty$

- Si *x* tiende a *"a"* por la izquierda y entonces $f(x)$ tiende a menos infinito. Matemáticamente lo expresamos así:
  $x \to a^- \Rightarrow f(x) \to -\infty$

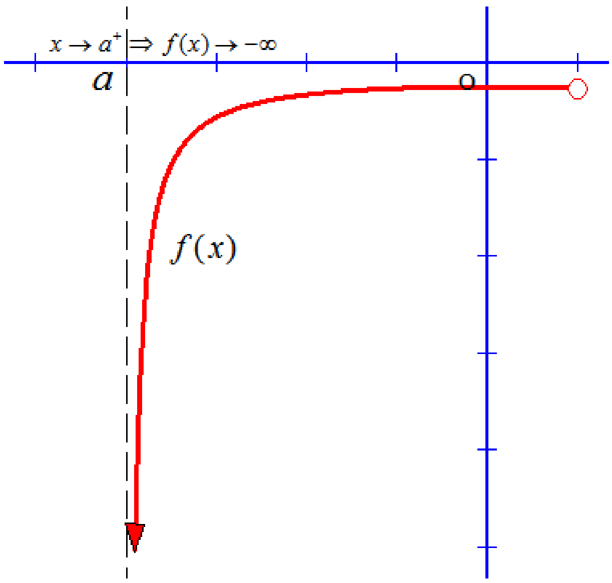
  Gráficamente sería de esta manera:




Diremos que la recta $x = a$ es una ***asíntota vertical*** por la izquierda de la función $y = f(x)$ hacia $-\infty$

- Si *x* tiende a *"a"* por la derecha y entonces $f(x)$ tiende a menos infinito. Matemáticamente lo expresamos así:
  $x \to a^+ \Rightarrow f(x) \to -\infty$

  Gráficamente sería de esta manera:



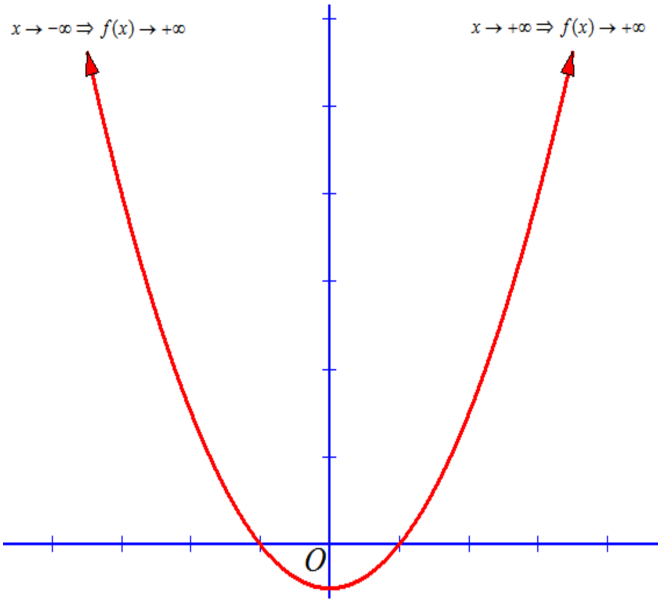

Diremos que la recta $x = a$ es una ***asíntota vertical*** por la derecha de la función $y = f(x)$ hacia $-\infty$

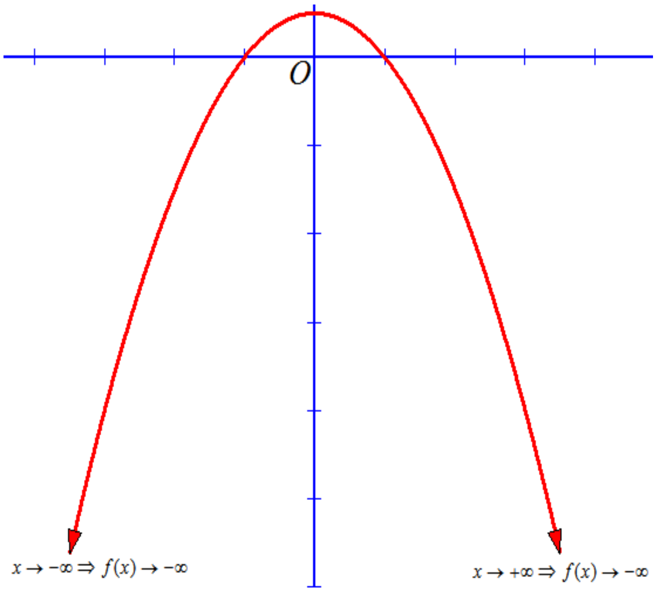
Una función tiende a más o menos infinito cuando *x* tiende a más o menos infinito cuando a al hacerse la variable independiente “*x*” muy grande, en valor absoluto, también se hace muy grande la variable dependiente “*y*”, en valor absoluto. En estos casos, se dice que la función no tiene un comporta miento asintótico.

Tenemos cuatro caso que los representamos matemáticamente como sigue:

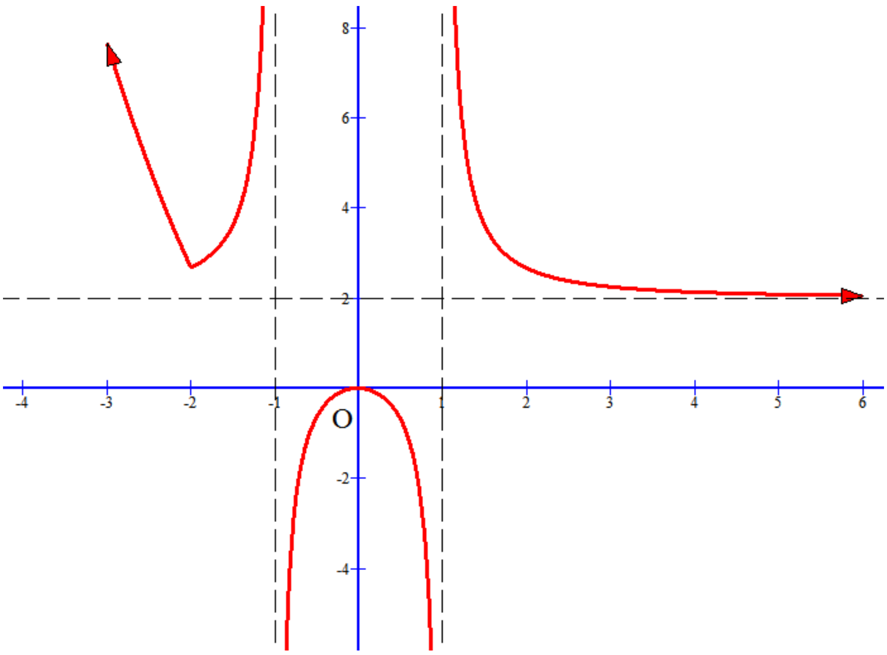
- $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$
- $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$
- $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$
- $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$

Gráficamente sería asi:




*Ejemplo*: Determinar el comportamiento tendencial o asintótico de la función $y = f(x)$ cuya gráfica es la dada:




Vamos a ir recorriendo la gráfica de izquierda ( $-\infty$ ) a derecha ( $+\infty$ )

- En $-\infty$, la función se va a $+\infty$, y no tiene asíntota, es decir, $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$
- Si $x \to -1^- \Rightarrow f(x) \to +\infty$, por tanto, la función tiene una asíntota vertical por la izquierda hacia $+\infty$ que es la recta $x=-1$
- Si $x \to -1^+ \Rightarrow f(x) \to -\infty$, por tanto, la función tiene una asíntota vertical por la derecha hacia $-\infty$ que es la recta $x=-1$
- Si $x \to 1^- \Rightarrow f(x) \to -\infty$, por tanto, la función tiene una asíntota vertical por la izquierda hacia $-\infty$ que es la recta $x=1$
- Si $x \to 1^+ \Rightarrow f(x) \to +\infty$, por tanto, la función tiene una asíntota vertical por la derecha hacia $+\infty$ que es la recta $x=1$
- En $+\infty$, la función se aproxima a 2, es decir, $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to 2$. Por tanto, la función tiene una asíntota horizontal en $+\infty$, que es la recta $y=2$

## 9. OPERACIONES CON FUNCIONES. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

# *Operaciones con funciones*

Análogamente a las operaciones con números reales se pueden definir la suma, resta, producto y cociente de funciones. Consideremos dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, se definen las siguientes operaciones:

- Suma o resta de funciones: $(f \pm g)(x) = f(x) + g(x)$
- Producto de funciones: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- Cociente de funciones: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

# *Composición de funciones*

*Definición*: Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, tales que $\mathrm{Im}(f) \subseteq Dom(g)$, se llama *función compuesta* de la función *f* con *g* (o *f* compuesta con *g*) a: $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$

Es decir, aplicamos *g* al resultado de aplicar *f* a la variable independiente "*x*"

No es conmutativo, es decir, normalmente $g \circ f \neq f \circ g$

*Ejemplo*: Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$, entonces

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[\sqrt{x}] = \frac{(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}-1} = \frac{x}{2\sqrt{x}-1}$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left[\frac{x^2}{2x-1}\right] = \sqrt{\frac{x^2}{2x-1}}$$

*Ejemplo*: Sean $f(x)=\frac{x}{x-1}$ y $g(x)=2x+1$, entonces

$$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g\left[\frac{x}{x-1}\right]=2\frac{x}{x-1}+1=\frac{2x+x-1}{x-1}=\frac{3x-1}{x-1}$$

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f[2x+1]=\frac{2x+1}{(2x+1)-1}=\frac{2x+1}{2x}$$

### 10. FUNCIÓN INVERSA

Dada una función $y=f(x)$, la *función inversa* de $f$ es aquella que devuelve cada valor imagen a su original y se nota por $f^{-1}(x)$

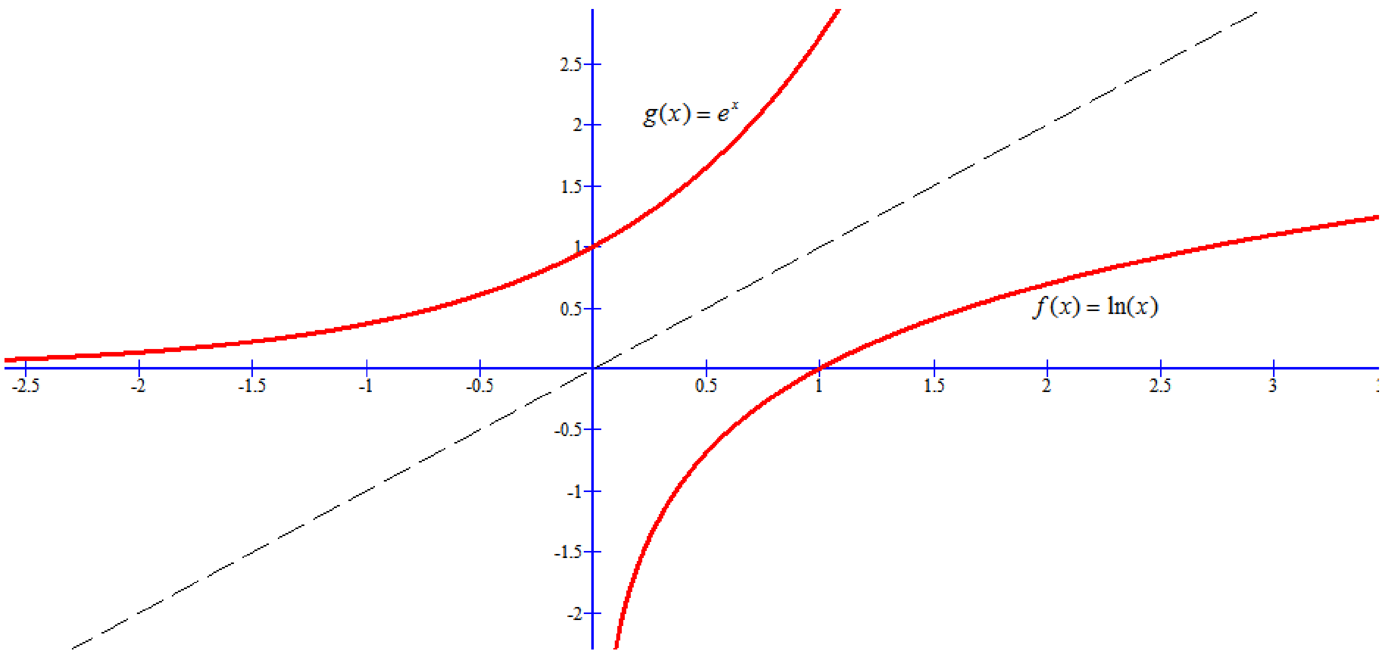
Se tiene que cumplir que $(f\circ f^{-1})(x)=(f^{-1}\circ f)(x)=x$

Además las gráficas de $f$ y $f^{-1}$ son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante (recuerdo que esta bisectriz tiene por ecuación $y=x$)

*Ejemplo*: Las funciones $f(x)=\ln(x)$ y $g(x)=e^x$ son inversas pues se tiene que

$(f\circ g)(x)=(f)(g(x))=f(e^x)=\ln(e^x)=x$.

Las gráficas de estas funciones son las siguientes y vemos su simetría:




*Ejemplo*: Calcular la inversa de la función $f(x)=2x+5$

Partimos de $y = 2x+5$ → permutamos la "*x*" y la "*y*", nos queda $x = 2y+5$ → despejamos "*y*" → $x-5 = 2y$ →
$y = \frac{x-5}{2}$ → $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

Y ya tenemos que $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

<u>Comprobación</u>: Vamos a calcular $(f \circ f^{-1})(x)$ para ver que nos da la función identidad

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left[f^{-1}(x)\right] = f\left[\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right] = 2\cdot(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}) + 5 = x - 5 + 5 = x$$

Lo mismo se puede hacer con $f^{-1} \circ f$

<u>*Ejemplo*</u>: Calcular la inversa de $f(x) = \frac{3x}{2x-1}$

Partimos de $y = \frac{3x}{2x-1}$ → permutamos la "*x*" y la "*y*", nos queda $x = \frac{3y}{2y-1}$ → despejamos "*y*" → $x\cdot(2y-1) = 3y$
→ $2xy - x = 3y$ → $2xy - 3y = x$ → sacamos factor común "y" → $y\cdot(2x-3) = x$ → $y = \frac{x}{2x-3}$

Y ya tenemos que $f^{-1}(x) = \frac{x}{2x-3}$

<u>Comprobación</u>: Vamos a calcular $(f \circ f^{-1})(x)$ para ver que nos da la función identidad

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left[f^{-1}(x)\right] = f\left[\frac{x}{2x-3}\right] = \frac{3\frac{x}{2x-3}}{2\frac{x}{2x-3} - 1} = \frac{\frac{3x}{2x-3}}{\frac{2x-2x+3}{2x-3}} = \frac{\frac{3x}{2x-3}}{\frac{3}{2x-3}} = \frac{3x}{3} = x$$

Lo mismo se puede hacer con $f^{-1} \circ f$