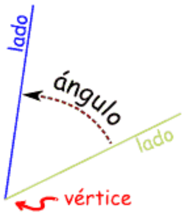
UNIDAD 1: **Trigonometría I**

1. INTRODUCCIÓN. SISTEMAS DE MEDIDAS DE ÁNGULOS

Trigonometría proviene del griego: *trigonos* (triángulo) y *metrón* (medida). También a veces se usa el término Goniometría, que proviene de *gonia* (ángulo). En sus orígenes esta rama de la matemática se utilizó para resolver problemas de agrimensura y astronomía, pero con el desarrollo de la ciencia se ha convertido en un instrumento indispensable en la física, la ingeniería, la medicina y todo otro proceso en el que se encuentren comportamientos que se repiten cíclicamente. Posee numerosas aplicaciones, entre las que se encuentran: las técnicas de triangulación, por ejemplo, son usadas en astronomía para medir distancias a estrellas próximas, en la medición de distancias entre puntos geográficos, y en sistemas globales de navegación por satélites.

Definición: Angulo es la porción del plano limitada por dos semirrectas que tienen un origen común.



Según el sentido del giro decimos que:

- Un ángulo es positivo si el giro para describirlo es de sentido contrario al de las agujas del reloj.
- Un ángulo es negativo si el giro para describirlo es del mismo sentido que el giro de las agujas del reloj.

Los ángulos más conocidos son:

- El giro o ángulo completo.
- El ángulo llano.
- El cuadrante o ángulo recto.

Los ángulos se suelen representar con las letras griegas: α (alpha), β (beta), γ (gamma), ω (omega), φ (phi)

Para medir ángulos pueden adoptarse distintas unidades. Los sistemas más usados son

a) Sistema sexagesimal

La unidad de medida angular es el *grado sexagesimal*, que es la noventa-ava parte del ángulo recto (ó bien, el ángulo completo son 360^o grados sexagesimales) y se simboliza 1^o. Cada grado tiene 60 minutos: 1^o = 60'

Cada minuto tiene 60 segundos: 1' = 60''

A partir de los segundos se usa sistema decimal

Un ángulo llano mide 180^o y un giro completo mide 360^o. Un ángulo recto son 90^o

Ejemplo: Son ángulos $\alpha = 27^o 15' 23.14''$, $\beta = -126^o 1'$

Operaciones con ángulos en sistema sexagesimal

Veamos mediante ejemplos como se efectúan la suma y diferencia de ángulos, así como el producto por un nº entero o la división por un nº entero.

Ejemplo: Dados los ángulos $\alpha = 57^o\ 35'\ 23.14''$, $\beta = 67^o\ 59'\ 43''$ y $\gamma = 25^o\ 50'\ 44''$, calcular:

a) $\alpha + \beta$

$\alpha =$	57^o	35'	23.14''
$\beta =$	67^o	59'	43.00''
$\alpha+\beta =$	124^o	94' = 1^o 34'	66.14'' = 1' 6.14''
$\alpha+\beta =$	125^o	34'	66.14'' = 1' 6.14''
$\alpha+\beta =$	125^o	35'	6.14''

Por tanto, $\alpha + \beta = 125^o\ 35'\ 6.14''$.

b) $\beta - \alpha$

$\beta =$	67º	59'	43.00"
$\alpha =$	57º	35'	23.14"
$\beta - \alpha =$	10º	24'	19.86"

Por tanto, $\beta - \alpha$=10º 24' 19.86" . Observamos que todas las cantidades de minutos y segundos del minuendo (β) son superiores a los correspondientes del sustraendo (α), con lo cual se puede realizar la diferencia sin problemas

c) $\alpha - \beta$

En este caso, el nº de grados de β, es mayor que el de α, por tanto el resultado es un ángulo negativo y la forma de proceder es calcular $\beta - \alpha$ y cambiarle el signo, pues $\alpha - \beta = -(\beta - \alpha)$. Por tanto por el apartado anterior, como ya lo tenemos hecho, $\alpha - \beta$ = -10º 24' 19.86"

d) $\alpha - \gamma$

En este caso los minutos y segundos del minuendo son inferiores a los minutos y segundos del sustraendo, por lo que debemos aumentar los del minuendo para poder realizar la resta.

$\alpha =$	57º	35'	23.14"
$\alpha =$(pasamos un grado a minutos)	56º	95'	23.14"
$\alpha =$(pasamos un minuto a segundos)	56º	94'	83.14"
$\gamma =$	25º	50'	44.00"
$\alpha - \gamma =$(ya podemos restar)	31º	44'	39.14"

Por tanto, $\alpha - \gamma =$ 31º 44' 39.14"

e) 8α

$\alpha =$	57º	35'	23.14"
$8\alpha =$	456º	280'	185.12"
$8\alpha =$ (pasamos minutos a grados)	456º	280' = 4·60' + 40' = 4º + 40'	185.12"
$8\alpha =$ (pasamos segundos a minuto)	460º	40'	185.12" = 3·60" + 5.12" = 3' + 5.12"
$8\alpha =$	460º	43'	5.12"

Por tanto, 8α = 460º 43' 5.12"

f) $\frac{1}{5}\beta$

Para hacer la división procedemos como en una división normal y los restos los vamos añadiendo a la unidad inmediatamente inferior

67º		59'	43"	5
-65º		120'		13º 35' 56.6"
2º = 120'	(sumamos)	179'	43"	
		-175'	240"	
		4' = 240" (sumamos)	283"	
			-283"	
			0	

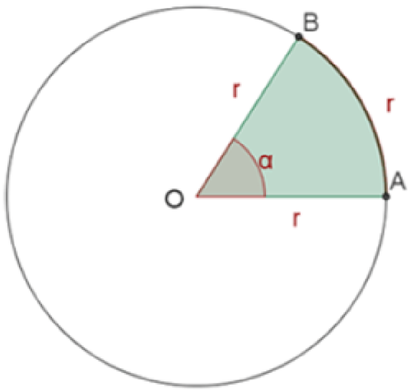
Por tanto, $\frac{1}{5}\beta = 13^{\circ}\ 35'\ 56.6''$

NOTA: Todos estos cálculos se pueden realizar en la calculadora de manera fácil. La calculadora se ha de encontrar en modo DEG

b) El radián

Definición: Un radián es el ángulo cuyo arco mide igual que el radio con el que ha sido trazado.

Como podemos observar en el dibujo, el ángulo α mide 1 radián pues el radio r de la circunferencia coincide con la longitud del arco que determina. Diremos que $\alpha = 1$ rad



Como sabemos la longitud de una circunferencia es $L = 2{\cdot}\pi{\cdot}r$, es decir, el radio se repite $2{\cdot}\pi$ veces. Como 1 rad abarca un arco que mide un radio, un ángulo completo (360°) es $2{\cdot}\pi$ radianes.

Ya tenemos la primera equivalencia entre los dos sistemas:

$$2{\cdot}\pi \text{ rad} = 360^{\circ}$$

Ejemplo: Pasar a radianes los siguientes ángulos en sistema sexagesimal:

a) 180° b) 90°

a) $180^{\circ} = \frac{360^{\circ}}{2} = \frac{2{\cdot}\pi \text{ rad}}{2} = \pi \text{ rad}$

También se puede hacer mediante una regla de tres simple

b) $90^{o}=\frac{360^{o}}{4}=\frac{2\cdot\pi\text{ rad}}{4}=\frac{\pi}{2}\text{ rad}$

Construimos una tabla con las equivalencias más importantes:

SEXAGESIMAL	RADIÁN
0^{o}	0
90^{o}	$\frac{\pi}{2}$
180^{o}	π
270^{o}	$\frac{3\cdot\pi}{2}$
360^{o}	$2\cdot\pi$
30^{o}	$\frac{\pi}{6}$
45^{o}	$\frac{\pi}{4}$
60^{o}	$\frac{\pi}{3}$
120^{o}	$\frac{2\cdot\pi}{3}$
135^{o}	$\frac{3\cdot\pi}{4}$
150^{o}	$\frac{5\cdot\pi}{6}$
210^{o}	$\frac{7\cdot\pi}{6}$
225^{o}	$\frac{5\cdot\pi}{4}$
240^{o}	$\frac{4\cdot\pi}{3}$
300^{o}	$\frac{5\cdot\pi}{3}$
315^{o}	$\frac{7\cdot\pi}{4}$
330^{o}	$\frac{11\cdot\pi}{6}$

De manera similar se puede pasar de radianes a grados, pero casi siempre nos hará falta el uso de la calculadora.
Ejemplo: Pasar a grados sexagesimales los siguientes ángulos:

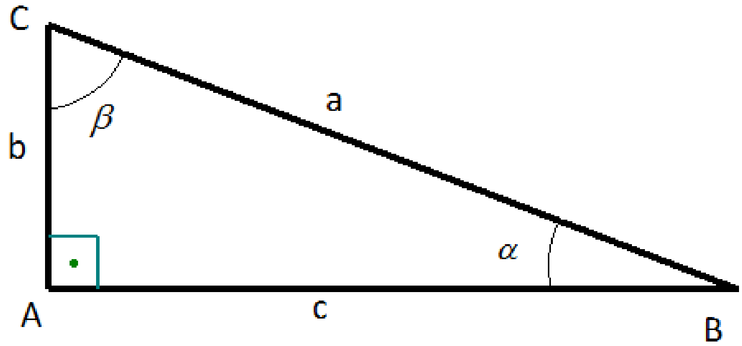
a. 2 rad = $2\cdot\frac{180^{o}}{\pi}$ = (ahora hay que usar la calculadora) = $114^{o}35'29.6''$

b. 1 rad = $1\cdot\frac{180^{o}}{\pi}$ = (ahora hay que usar la calculadora) = $57^{o}17'44.81''$

c. $\frac{\pi}{5}\text{ rad}=\frac{180^{o}}{5}=36^{o}$

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

Vamos a usar un triángulo rectángulo para definir las razones trigonométricas de un ángulo agudo.
Sea el triángulo rectángulo siguiente:



En él tenemos que:

- $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$
- a es la hipotenusa
- b es el cateto opuesto a α, o bien, el cateto contiguo a β
- c es el cateto opuesto a β, o bien, el cateto contiguo a α

Se definen las razones trigonométricas como sigue:

- *SENO* $\text{sen } \alpha = \frac{cateto\ \ opuesto\ \ de\ \ \alpha}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$	- *COSECANTE* $\text{cosec } \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ \ opuesto\ \ de\ \ \alpha} = \frac{a}{b}$
- *COSENO* $\cos \alpha = \frac{cateto\ \ contiguo\ \ de\ \ \alpha}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$	- *SECANTE* $\sec \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ \ contiguo\ \ de\ \ \alpha} = \frac{a}{c}$
- *TANGENTE* $\text{tg } \alpha = \frac{cateto\ \ opuesto\ \ de\ \ \alpha}{cateto\ \ contiguo\ \ de\ \ \alpha} = \frac{b}{c}$	- *COTANGENTE* $\text{cotg } \alpha = \frac{cateto\ \ contiguo\ \ de\ \ \alpha}{cateto\ \ opuesto\ \ de\ \ \alpha} = \frac{c}{b}$

NOTA: Estas razones dependen sólo del ángulo α y no de las medidas de los lados del triángulo construido

Propiedad: Se cumple que:

a) $\boxed{tg\ \ \alpha = \frac{sen\ \ \alpha}{\cos\ \ \alpha}}$ b) $\boxed{cotg\ \ \alpha = \frac{\cos\ \ \alpha}{sen\ \ \alpha} = \frac{1}{\text{tg } \alpha}}$ c) $\boxed{\sec \alpha = \frac{1}{\cos\ \ \alpha}}$ d) $\boxed{\cos ec\ \ \alpha = \frac{1}{sen\ \ \alpha}}$

Demostración:

a) $$\frac{sen\ \ \alpha}{\cos\ \ \alpha} = \frac{b/a}{c/a} = \frac{b}{c} = tg\ \ \alpha$$

Las demás son análogas, y las dejo como ejercicio

Propiedad fundamental: Se tiene que: $\boxed{sen^2\alpha + \cos^2 \alpha = 1}$

O bien $sen^2\alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ ó $\cos^2 \alpha = 1 - sen^2\alpha$

Demostración: Tenemos que

$$sen^2\alpha + \cos^2 \alpha = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = (\text{como estamos en un triángulo rectángulo,}$$

$$\text{se verifica el teorema de Pitágoras, luego a}^2 = b^2 + c^2) = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Consecuencias de la propiedad fundamental:

Se verifica que:

a) $\boxed{1+tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha}$

Demostración:

$$1+tg^2\alpha = 1+\frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + sen^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$$

b) $\boxed{1+cotg^2\alpha = \dfrac{1}{sen^2\alpha} = \mathrm{cosec}^2\alpha}$

Demostración:

$$1+\mathrm{cotg}^2\alpha = 1+\frac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha} = \frac{sen^2\alpha + \cos^2\alpha}{sen^2\alpha} = \frac{1}{sen^2\alpha} = \mathrm{cosec}^2\alpha$$

c) $\boxed{-1 \le sen\ \alpha \le 1}$, y $\boxed{-1 \le \cos\ \alpha \le 1}$

Ejercicio: Demostrar la siguiente igualdad trigonométrica: $sen^2\alpha = 1-\dfrac{\cot g^2\alpha}{\cos ec^2\alpha}$

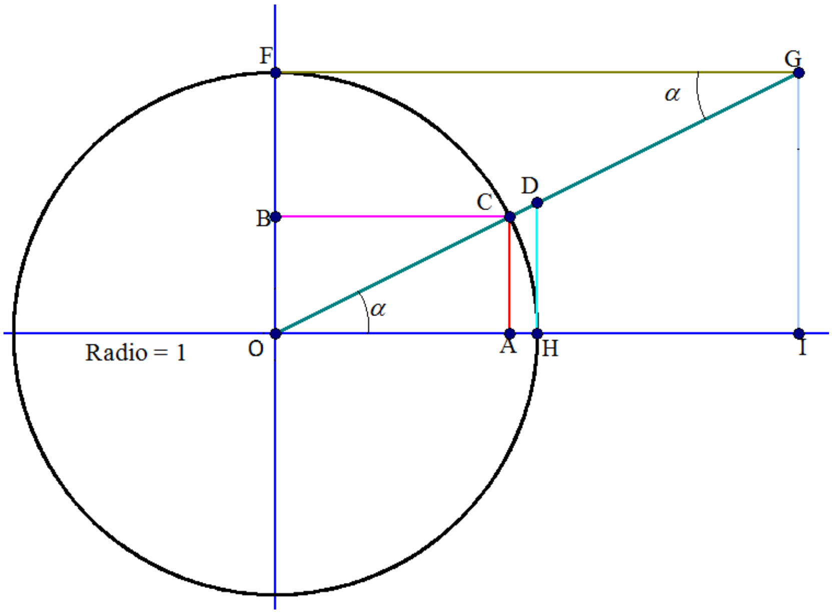
Partimos del segundo miembro y sustituimos por seno y coseno

$$1-\frac{\mathrm{cotg}^2\alpha}{\cos ec^2\alpha} = 1-\frac{\cos^2\alpha / \cancel{sen^2\alpha}}{1/\cancel{sen^2\alpha}} = 1-\frac{\cos^2\alpha \cdot sen^2\alpha}{sen^2\alpha} = 1-\cos^2\alpha = sen^2\alpha$$ con lo cual queda demostrado

3. CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA UNIDAD. SEGMENTOS TRIGONOMÉTRICOS

Vamos a considerar una circunferencia de radio 1 y sobre ella dibujamos un ángulo α. Dependiendo del cuadrante donde se encuentre α vamos a ver que segmentos representan las razones trigonométricas y los signos de éstas.

$\alpha \in$ I CUADRANTE



Vemos que:

$\text{sen } \alpha = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{AC}}{1} = \overline{AC} = \overline{OB}$. La distancia $\overline{OB}$ es positiva, luego $\text{sen } \alpha$ es positivo

$\cos \alpha = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{OA}}{1} = \overline{OA}$. La distancia $\overline{OA}$ es positiva, luego $\cos \alpha$ es positivo

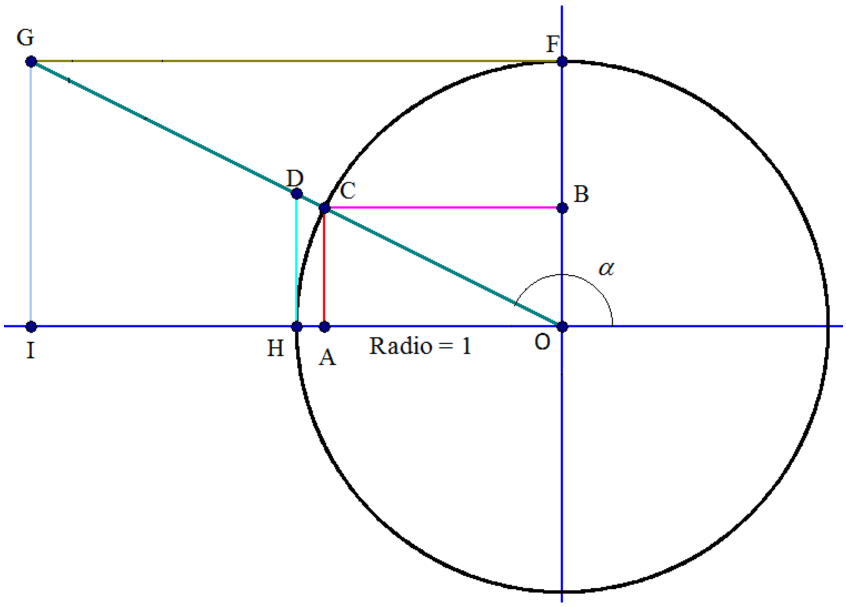
$\text{tg } \alpha = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{HD}}{\overline{OH}} = \dfrac{\overline{HD}}{1} = \overline{HD}$. Como $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$, luego $\text{tg } \alpha$ es positiva

$\text{cosec } \alpha = \dfrac{\overline{OC}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{OG}}{\overline{OF}} = \dfrac{\overline{OG}}{1} = \overline{OG}$. Como $\text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha}$, al ser el seno positivo, $\text{cosec } \alpha$ es positivo

$\sec \alpha = \dfrac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{OD}}{\overline{OH}} = \dfrac{\overline{OD}}{1} = \overline{OD}$. Como $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha}$, al ser el coseno positivo, $\sec \alpha$ es positivo

$\text{cotg } \alpha = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{FG}}{\overline{OF}} = \dfrac{\overline{FG}}{1} = \overline{FG}$. Como $\text{cotg } \alpha = \dfrac{1}{\text{tg } \alpha}$, al ser la tangente positiva, $\text{cotg } \alpha$ es positiva

$\alpha \in$ II CUADRANTE



De forma análoga, se tiene que:

$\text{sen } \alpha = \overline{OB}$. La distancia $\overline{OB}$ es positiva, luego $\text{sen } \alpha$ es positivo

$\cos \alpha = \overline{OA}$. La distancia $\overline{OA}$ es negativa, luego $\cos \alpha$ es negativo

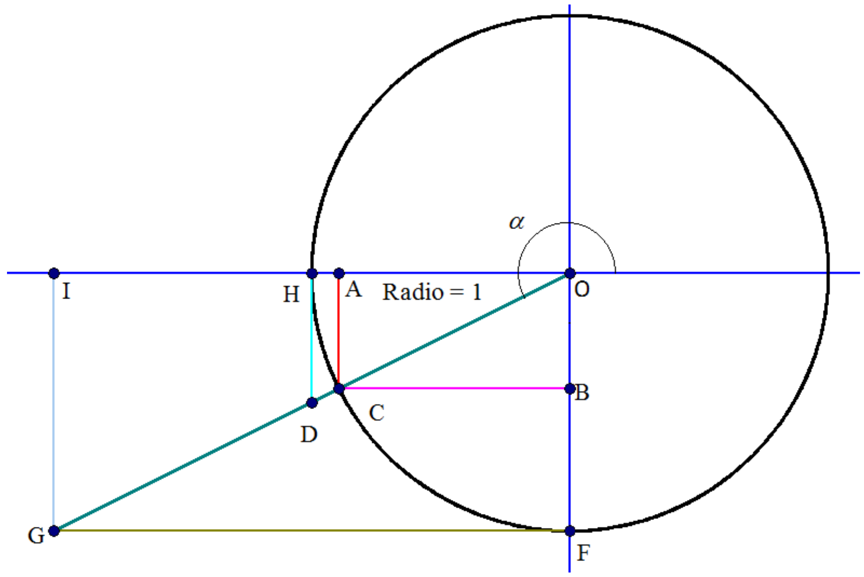
$\text{tg } \alpha = \overline{HD}$. Como $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$, luego $\text{tg } \alpha$ es negativa

$\text{cosec } \alpha = \overline{OG}$. Como $\text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha}$, al ser el seno positivo, $\text{cosec } \alpha$ es positivo

$\sec \alpha = \overline{OD}$. Como $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha}$, al ser el coseno negativo, $\sec \alpha$ es negativo

$\text{cotg } \alpha = \overline{FG}$. Como $\text{cotg } \alpha = \dfrac{1}{\text{tg } \alpha}$, al ser la tangente negativa, $\text{cotg } \alpha$ es negativa

$\alpha \in$ III CUADRANTE



De forma análoga, se tiene que:

sen $\alpha = \overline{OB}$. La distancia $\overline{OB}$ es negativa, luego sen α es negativa

cos $\alpha = \overline{OA}$. La distancia $\overline{OA}$ es negativa, luego cos α es negativo

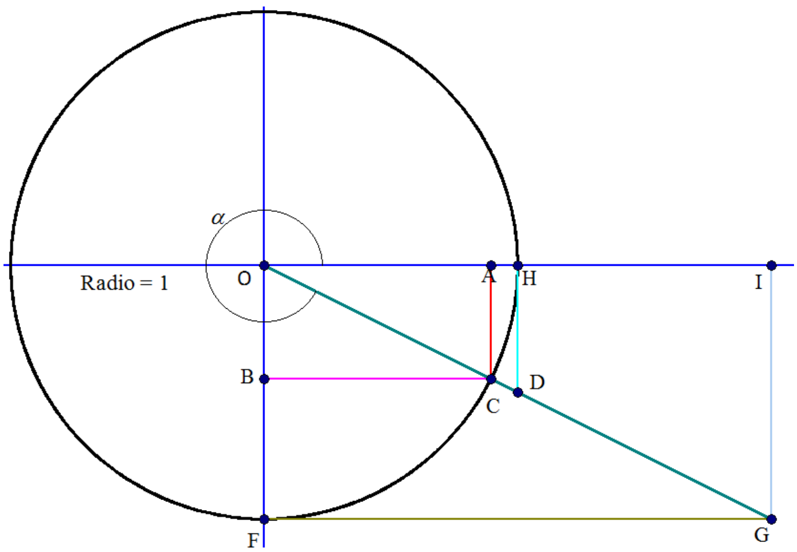
tg $\alpha = \overline{HD}$. Como $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$, luego tg α es positiva

cosec $\alpha = \overline{OG}$. Como $\text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha}$, al ser el seno negativo, cosec α es negativo

sec $\alpha = \overline{OD}$. Como $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha}$, al ser el coseno negativo, sec α es negativo

cotg $\alpha = \overline{FG}$. Como $\text{cotg } \alpha = \dfrac{1}{\text{tg } \alpha}$, al ser la tangente positiva, cotg α es positiva

$\alpha \in$ IV CUADRANTE



De forma análoga, se tiene que:

sen $\alpha = \overline{OB}$. La distancia $\overline{OB}$ es negativa, luego sen α es negativo

cos $\alpha = \overline{OA}$. La distancia $\overline{OA}$ es positiva, luego cos α es positivo

tg $\alpha = \overline{HD}$. Como $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$, luego tg α es negativa

$\operatorname{cosec}\ \alpha = \overline{OG}$. Como $\operatorname{cosec}\ \alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\ \alpha}$, al ser el seno negativo, $\operatorname{cosec}\ \alpha$ es negativo

$\sec\ \alpha = \overline{OD}$. Como $\sec\ \alpha = \dfrac{1}{\cos\ \alpha}$, al ser el coseno positivo, $\sec\ \alpha$ es positivo

$\operatorname{cotg}\ \alpha = \overline{FG}$. Como $\operatorname{cotg}\ \alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\ \alpha}$, al ser la tangente negativa, $\operatorname{cotg}\ \alpha$ es negativa

__CUADRO RESUMEN DE SIGNOS DEL SENO, COSENO Y TANGENTE__

	I Cuadrante	II Cuadrante	III Cuadrante	IV Cuadrante
Seno	**+**	**+**	**-**	**-**
Coseno	**+**	**-**	**-**	**+**
tangente	**+**	**-**	**+**	**-**

__*Ejercicio*__: Sabiendo que un ángulo $\alpha \in \text{II CUADRANTE}$ y que $\operatorname{sen}\ \alpha = \dfrac{2}{3}$, calcula las restantes razones trigonométricas.

__*Solución*__: Por la igualdad fundamental tenemos que: $\cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha \Rightarrow$

$$\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{9} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{5}{9}} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Como estamos en el II Cuadrante, el coseno es negativo, por tanto, $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Ya tenemos el seno y el coseno, por lo cual podemos conocer todas las demás razones:

__TANGENTE__

$tg\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\ \alpha}{\cos\ \alpha} = \dfrac{\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} \Rightarrow tg\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ Racionalizamos, $tg\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \Rightarrow tg\alpha = -\dfrac{2\cdot\sqrt{5}}{5}$, que sale negativa, como bien sabemos, pues estamos en el II Cuadrante.

COSECANTE

$$\operatorname{cosec}\ \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\ \alpha} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

SECANTE

$$\sec\ \alpha = \frac{1}{\cos\ \alpha} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sec\ \alpha = -\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sec\ \alpha = -\frac{3\cdot\sqrt{5}}{5}$$

COTANGENTE

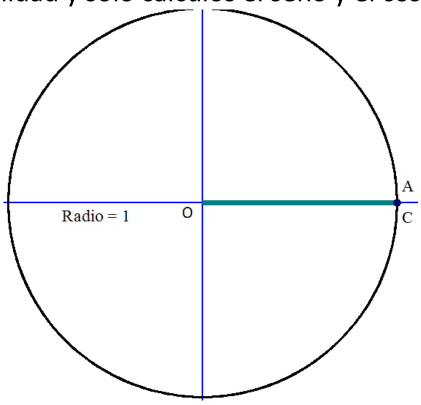
$$cotg\alpha = \frac{\cos\ \alpha}{\operatorname{sen}\ \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} \Rightarrow tg\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

4. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES

Vamos a calcular las razones trigonométricas de los ángulos más usados.

a. Ángulo $0^{\circ} = 0 \text{ rad}$

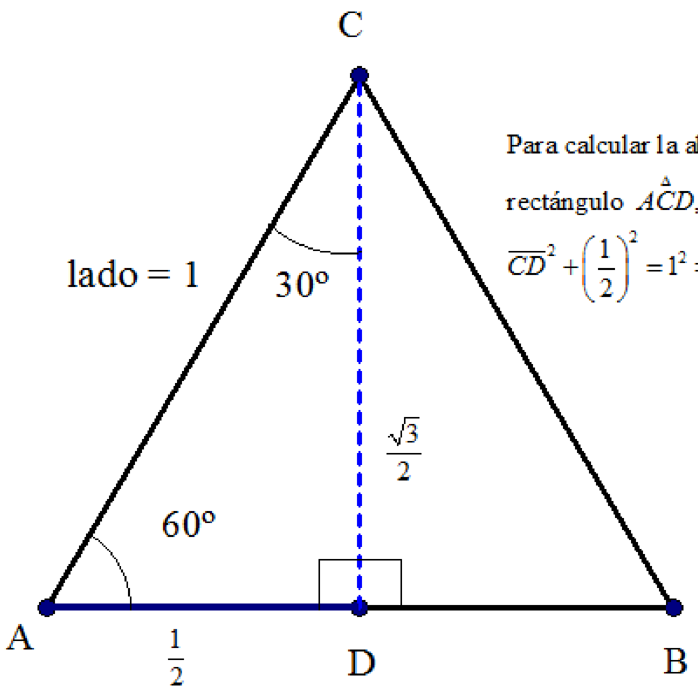
Vamos a basarnos en la circunferencia unidad y sólo cálculos el seno y el coseno y a partir de ellas todas las demás



$\text{sen } 0 = \dfrac{\overline{AC}}{radio} =$ (como A y C coinciden) $\dfrac{\overline{AA}}{1} = \dfrac{0}{1} = 0$	$\text{cosec } 0 = \dfrac{1}{0}$ (diremos que no existe $\neg\exists$ o bien que es ∞) $= \infty$
$\cos 0 = \dfrac{\overline{OA}}{radio} = \dfrac{1}{1} = 1$	$\sec 0 = \dfrac{1}{1} = 1$
$\text{tg } 0 = \dfrac{0}{1} = 0$	$\text{cotg } 0 = \dfrac{1}{0}$ (diremos que no existe $\neg\exists$ o bien que es ∞) $= \infty$

b. Ángulo $30^{\circ} = \dfrac{\pi}{6} \text{ rad}$

Para calcular las razones trigonométricas del ángulo $30^{\circ} = \dfrac{\pi}{6} \text{ rad}$ vamos a utilizar un triángulo equilátero de lado 1 como el de la figura siguiente:



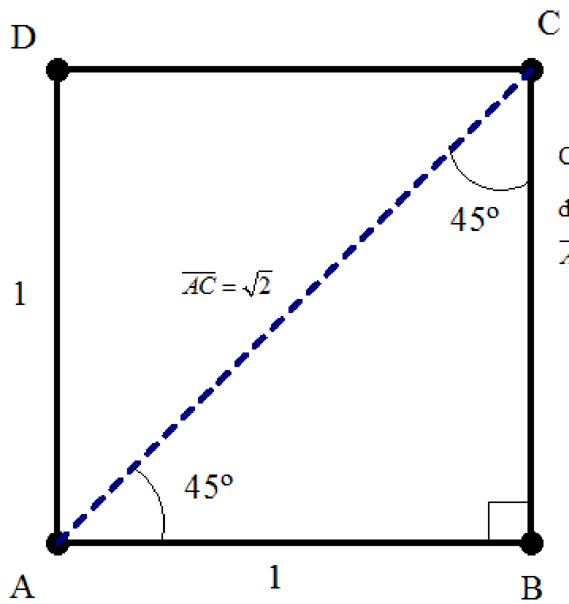
Para calcular la altura $\overline{CD}$ aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ACD}$,

$$\overline{CD}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \Rightarrow \overline{CD}^2 = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow \overline{CD}^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{1}{2}$	$\operatorname{cosec}\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$
$\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\sec\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$
$\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{CD}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\operatorname{cotg}\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

c. *Ángulo* $45^{\circ}=\dfrac{\pi}{4}$ rad

Para calcular las razones trigonométricas del ángulo $45^{\circ}=\dfrac{\pi}{4}$ rad vamos a utilizar un cuadrado de lado 1 como el de la figura siguiente:



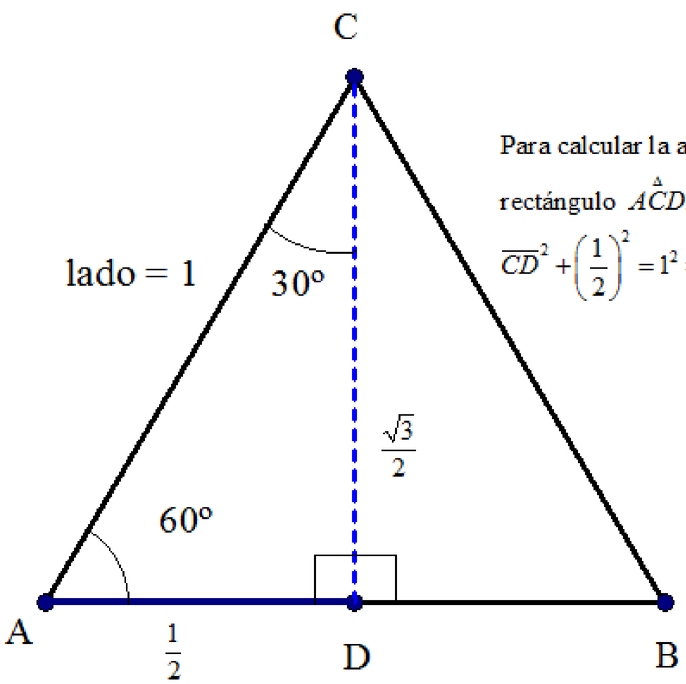
Calculamos la longitud de la diagonal, $\overline{AC}$, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo $A\hat{B}C$

$\overline{AC}^2=1^2+1^2\Rightarrow\overline{AC}^2=2\Rightarrow\overline{AC}=\sqrt{2}$

$\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\operatorname{cosec}\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$
$\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\sec\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$
$\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{1}{1}=1$	$\operatorname{cotg}\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{1}=1$

d. *Ángulo* $60^{\circ}=\dfrac{\pi}{3}$ rad

Para calcular las razones trigonométricas del ángulo $60^{\circ}=\dfrac{\pi}{3}$ rad vamos a utilizar un triángulo equilátero de lado 1 como el usado anteriormente:



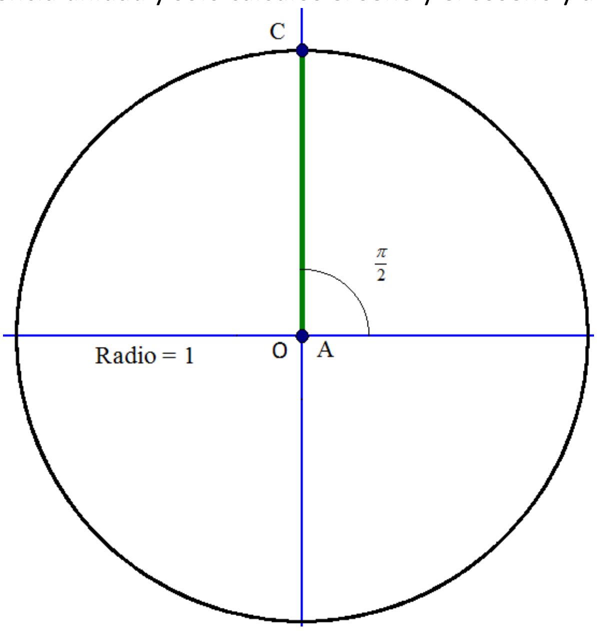
Para calcular la altura $\overline{CD}$ aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ACD}$,

$$\overline{CD}^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1^2\Rightarrow\overline{CD}^2=1-\frac{1}{4}\Rightarrow\overline{CD}^2=\frac{3}{4}\Rightarrow\overline{CD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\text{sen }\frac{\pi}{3}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\text{cosec }\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$	$\sec\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$
$\text{tg }\frac{\pi}{3}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$	$\text{cotg }\frac{\pi}{3}=\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

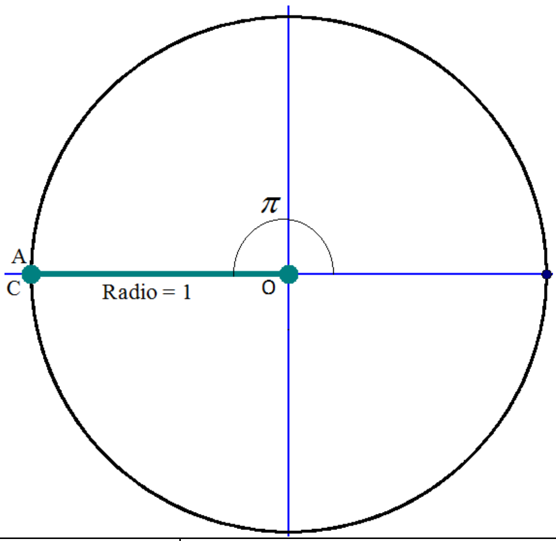
e. *Ángulo* $90^{o}=\frac{\pi}{2}\text{ rad}$

Vamos a basarnos en la circunferencia unidad y sólo cálculos el seno y el coseno y a partir de ellas todas las demás



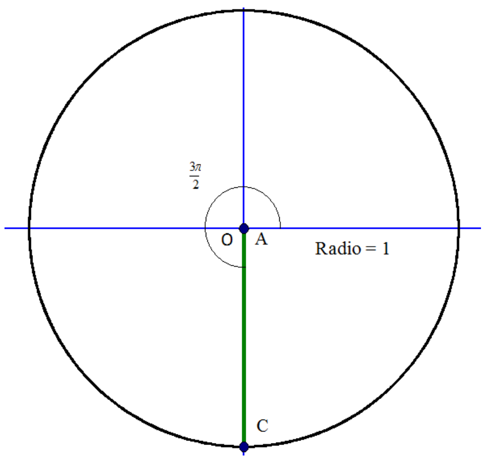
$\text{sen}\ \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\overline{AC}}{radio} = \dfrac{1}{1} = 1$	$\text{cosec}\ \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{1} = 1$
$\cos\ \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\overline{OA}}{radio} =$ (como A y O coinciden) $\dfrac{\overline{AA}}{1} = \dfrac{0}{1} = 0$	$\sec\ \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{0}$ (diremos que no existe $\neg\exists$ o bien que es ∞) $= \infty$
$\text{tg}\ \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{0}$ (diremos que no existe $\neg\exists$ o bien que es ∞) $= \infty$	$\text{cotg}\ \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{0}{1} = 0$

f. *Ángulo* $180^{o} = \pi$ rad



$\text{sen}\ \pi = \dfrac{\overline{AC}}{radio} =$ (como A y C coinciden) $\dfrac{\overline{AA}}{1} = \dfrac{0}{1} = 0$	$\text{cosec}\ \pi = \dfrac{1}{0}$ (diremos que no existe $\neg\exists$ o bien que es ∞) $= \infty$
$\cos\ \pi = \dfrac{\overline{OA}}{radio} = \dfrac{-1}{1} = -1$	$\sec\ \pi = \dfrac{1}{-1} = -1$
$\text{tg}\ \pi = \dfrac{0}{1} = 0$	$\text{cotg}\ \pi = \dfrac{1}{0}$ (diremos que no existe $\neg\exists$ o bien que es ∞) $= \infty$

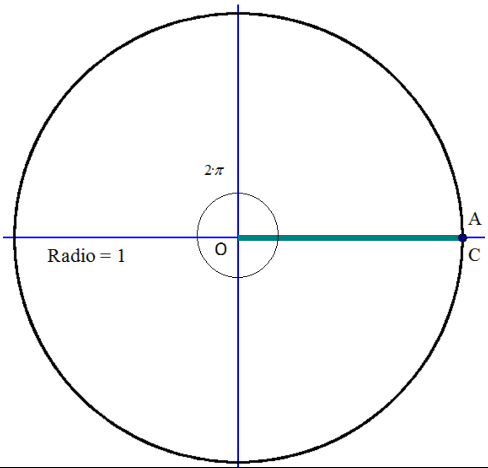
g. *Ángulo* $270^{o} = \dfrac{3 \cdot \pi}{2}$ rad



$\text{sen } \frac{3\cdot\pi}{2} = \frac{\overline{AC}}{radio} = \frac{-1}{1} = -1$	$\text{cosec } \frac{3\cdot\pi}{2} = \frac{1}{1} = 1$
$\cos \frac{3\cdot\pi}{2} = \frac{\overline{OA}}{radio} =$ $\text{(como A y O coinciden)} \frac{\overline{AA}}{1} = \frac{0}{1} = 0$	$\sec \frac{3\cdot\pi}{2} = \frac{1}{0}$ $\text{(diremos que no existe } \neg\exists \text{ o bien que es } \infty) = \infty$
$\text{tg } \frac{3\cdot\pi}{2} = \frac{1}{0} \text{ (diremos que no existe } \neg\exists \text{ o bien que es } \infty) = \infty$	$\text{cotg } \frac{3\cdot\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0$

h. Ángulo $360^{\circ} = 2\cdot\pi$ rad

Al dar una vuelta completa, las razones son iguales y empiezan a repetirse, luego las razones trigonométricas de $2\cdot\pi$ rad son iguales a las de 0 rad



$\text{sen } 2\cdot\pi = \frac{\overline{AC}}{radio} =$ $\text{(como A y C coinciden)} \frac{\overline{AA}}{1} = \frac{0}{1} = 0$	$\text{cosec } 2\cdot\pi = \frac{1}{0}$ $\text{(diremos que no existe } \neg\exists \text{ o bien que es } \infty) = \infty$
$\cos 2\cdot\pi = \frac{\overline{OA}}{radio} = \frac{1}{1} = 1$	$\sec 2\cdot\pi = \frac{1}{1} = 1$
$\text{tg } 2\cdot\pi = \frac{0}{1} = 0$	$\text{cotg } 2\cdot\pi = \frac{1}{0} \text{ (diremos que no existe } \neg\exists \text{ o bien que es } \infty) = \infty$

Hagamos una tabla resumen con el seno, coseno y tangente de los ángulos notables:

	SENO	COSENO	TANGENTE
$0^{\circ} = 0$ rad	0	1	0
$30^{\circ} = \frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$45^{\circ} = \frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60^{\circ} = \frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

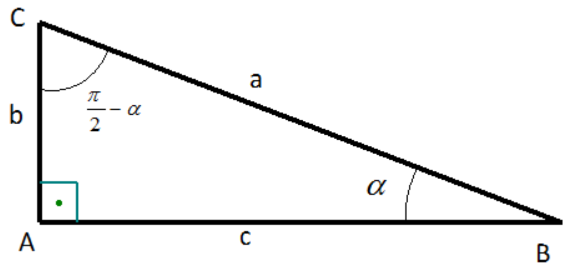
$90^{\circ} = \frac{\pi}{2}$ rad	1	0	∞
$180^{\circ} = \pi$ rad	0	-1	0
$270^{\circ} = \frac{3 \cdot \pi}{2}$ rad	-1	0	∞
$360^{\circ} = 2 \cdot \pi$ rad	0	1	0

5. RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS DE DISTINTOS CUADRANTES

a. *Ángulos complementarios*

Son aquellos ángulos cuya suma es 90°. Es decir, si un ángulo es α, su complementario es $90^{\circ} - \alpha$. O bien, usando radianes, α y $\frac{\pi}{2} - \alpha$, son complementarios.

En este tipo de ángulos el seno de uno es el coseno del otro y viceversa. Y por tanto la tangente y la cotangente también. Se observa fácilmente en la figura siguiente:



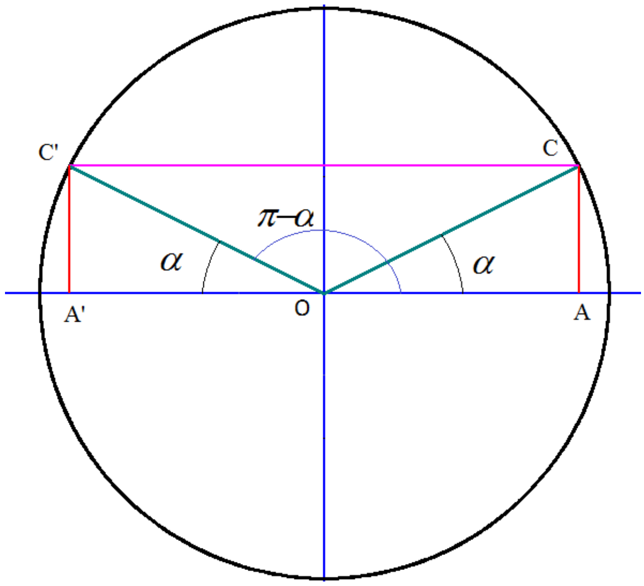
Como se observa:
$$\begin{cases} \text{sen } \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{b}{a} \\ \cos \alpha = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{c}{a} \\ \text{tg } \alpha = \text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{b}{c} \end{cases}$$

Ejemplo: Los ángulos de 60° y 30° son complementarios, y como hemos visto ya, el seno de uno es el coseno del otro.

b. *Ángulos suplementarios*

Son aquellos ángulos cuya suma es 180°. Es decir, si un ángulo es α, su suplementario es $180^{\circ} - \alpha$. O bien, usando radianes, α y $\pi - \alpha$, son suplementarios.

En este tipo de ángulos los senos coinciden pero los cosenos son opuestos, y por tanto las tangentes también son opuestas. Veámoslo gráficamente:



$$\begin{cases} \text{sen } (\pi-\alpha) = \dfrac{\overline{A'C'}}{radio} = \dfrac{\overline{AC}}{radio} = \text{sen } \alpha \\ \cos\,(\pi-\alpha) = \dfrac{\overline{OA'}}{radio} = \dfrac{-\overline{OA}}{radio} = \text{-}\cos\,\alpha \\ \text{tg } (\pi-\alpha) = \dfrac{\text{sen } (\pi-\alpha)}{\cos\,(\pi-\alpha)} = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\text{-}\cos\,\alpha} = \text{-tg } \alpha \end{cases}$$

Ejemplo: Calcula las razones trigonométricas de 120^o

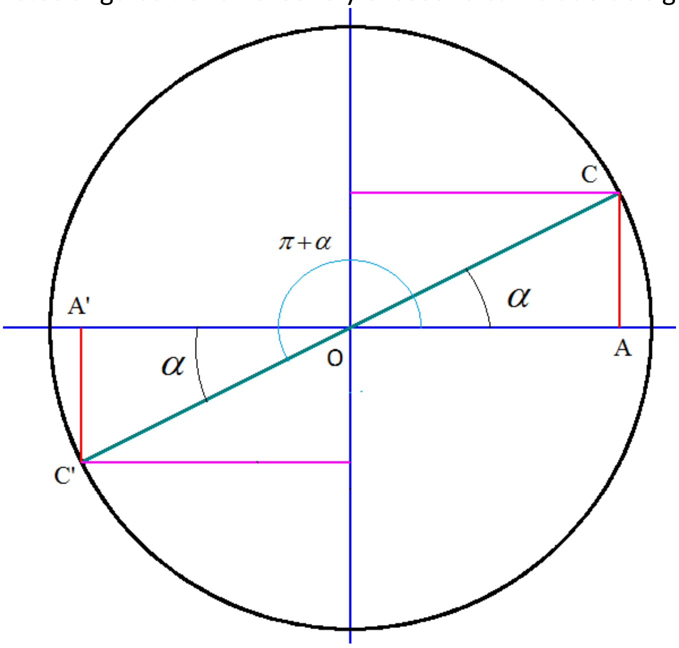
Nos damos cuenta que 60^o es el suplementario de 120^o, luego como ya conocemos las de 60^o, ya tenemos que:

$$\begin{cases} \text{sen } 120^o = \text{ sen } 60^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\, 120^o = \text{- } \cos\, 60^o = \text{- } \dfrac{1}{2} \\ \text{tg } 120^o = \text{- tg } 60^o = \text{- } \sqrt{3} \end{cases}$$

c. *Ángulos que se diferencian en* 180^o

Son ángulos de la forma, α y $180^o+\alpha$, que si los restamos da 180^o. O bien usando radianes, α y $\pi+\alpha$

Estos ángulos tienen el seno y el coseno cambiado de signo, y por tanto la tangente es la misma.



$$\begin{cases} \text{sen } (\pi+\alpha) = \dfrac{\overline{A'C'}}{radio} = \dfrac{-\overline{AC}}{radio} = \text{- sen } \alpha \\ \cos\,(\pi+\alpha) = \dfrac{\overline{OA'}}{radio} = \dfrac{-\overline{OA}}{radio} = \text{-}\cos\,\alpha \\ \text{tg } (\pi+\alpha) = \dfrac{\text{sen } (\pi+\alpha)}{\cos\,(\pi+\alpha)} = \dfrac{\text{- sen } \alpha}{\text{- }\cos\,\alpha} = \text{tg } \alpha \end{cases}$$

Ejemplo: Calcular la secante, la cosecante y la cotangente de $\dfrac{5\cdot\pi}{4}$ rad

En primer lugar pasamos el ángulo dado a grados, pues nos puede resultar más fácil.

$\frac{5\cdot\pi}{4}\text{ rad} = \frac{5\cdot 180^o}{4} = 225^o$ y ahora nos damos cuenta que 225^o y 45^o difieren 180^o, pues $225^o - 180^o = 45^o$ o lo que es lo mismo, $225^o = 180^o + 45^o$. Esto expresado en radianes sería que $\frac{5\cdot\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$

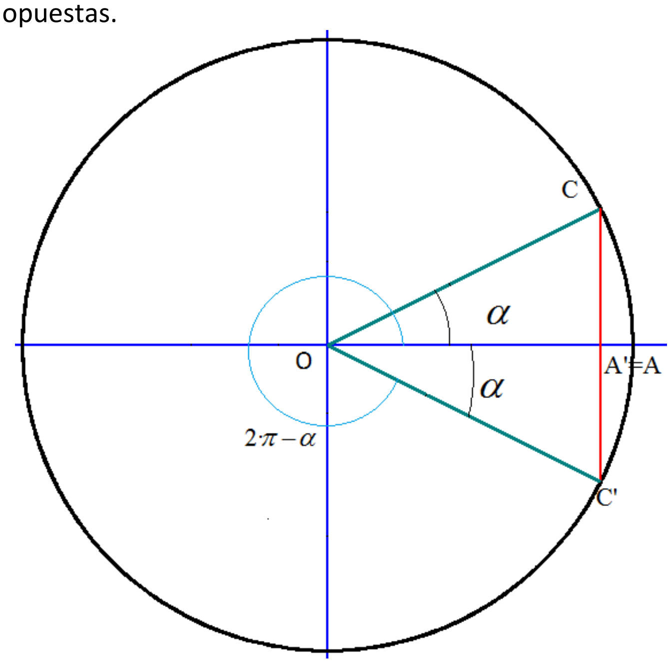
Por tanto, empleando radianes como es el dato del problema,

$$\begin{cases} \text{sen } \frac{5\cdot\pi}{4} = -\text{ sen } \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{cosec } \frac{5\cdot\pi}{4} = \frac{1}{\text{sen } \frac{5\cdot\pi}{4}} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{2} \\ \cos \frac{5\cdot\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sec \frac{5\cdot\pi}{4} = \frac{1}{\cos \frac{5\cdot\pi}{4}} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{2} \\ \text{tg } \frac{5\cdot\pi}{4} = \text{tg } \frac{\pi}{4} = 1 \end{cases}$$

d. *Ángulos que suman* 360^o

Son aquellos ángulos cuya suma es 360^o. Es decir, si un ángulo es α, el otro es $360^o - \alpha$. O bien, usando radianes, α y $2\cdot\pi - \alpha$, suman $2\cdot\pi - \alpha$..

En este tipo de ángulos los cosenos coinciden pero los senos son opuestos, y por tanto las tangentes también son opuestas.



$$\begin{cases} \text{sen } (2\pi - \alpha) = \frac{\overline{A'C'}}{radio} = \frac{-\overline{AC}}{radio} = -\text{ sen } \alpha \\ \cos (2\pi - \alpha) = \frac{\overline{OA'}}{radio} = \frac{\overline{OA}}{radio} = \cos \alpha \\ \text{tg } (2\pi - \alpha) = \frac{\text{sen } (2\pi - \alpha)}{\cos (2\pi - \alpha)} = \frac{-\text{ sen } \alpha}{\cos \alpha} = -\text{ tg } \alpha \end{cases}$$

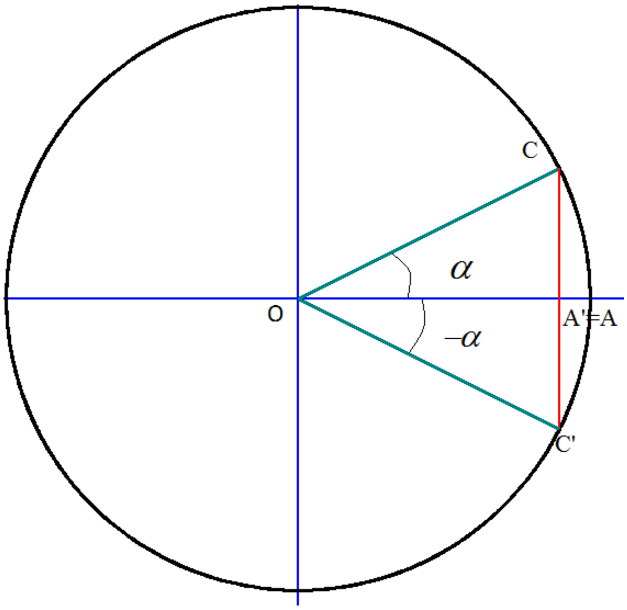
Ejemplo: Calcular la tangente del ángulo de 330^o

Nos damos cuenta que 330^o y 30^o suman 360^o, luego aplicando lo anterior, tenemos que

$$\text{tg } (330^o) = \frac{\text{sen } 330^o}{\cos 330^o} = \frac{-\text{ sen } 30^o}{\cos 30} = -\text{ tg } 30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

e. *Ángulos opuestos*

Son ángulos de signo opuesto, es decir, α y $-\alpha$. Como vemos en el dibujo su comportamiento es análogo al anterior, ángulos que suman 360^o



$$\begin{cases} \text{sen }(-\alpha) = \dfrac{\overline{A'C'}}{radio} = \dfrac{-\overline{AC}}{radio} = -\text{ sen } \alpha \\ \cos(-\alpha) = \dfrac{\overline{OA'}}{radio} = \dfrac{\overline{OA}}{radio} = \cos \alpha \\ \text{tg }(-\alpha) = \dfrac{\text{sen }(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \dfrac{-\text{ sen } \alpha}{\cos \alpha} = -\text{ tg } \alpha \end{cases}$$

Ejemplo: Calcular el coseno de $-\dfrac{\pi}{4}$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

f. *Ángulos que se diferencian en un nº enteros de vueltas*

Son ángulos que superan los 360° o inferiores a -360°, es decir, realizan vueltas completas. Son de la forma $\alpha + k\cdot 360^\circ$ con $k \in \mathbb{Z}$ o bien $\alpha + k\cdot 2\cdot\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ si es en radianes. Se suele poner como $\alpha + 2\cdot k\cdot\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ Hay que dividir el ángulo dado por 360, y el cociente es el nº de vueltas y el resto es el ángulo con el coinciden todas las razones trigonométricas. Las razones coinciden con la de α

$$\begin{cases} \text{sen }(\alpha + k\cdot 360^\circ) = \text{sen } \alpha \\ \cos(\alpha + k\cdot 360^\circ) = \cos \alpha \\ \text{tg }(\alpha + k\cdot 360^\circ) = \text{tg } \alpha \end{cases}$$

Ejemplo: Calcular el coseno de 855°

Hacemos la división de 855 entre 360 y nos da de cociente 2 y de resto 135, es decir, $855^\circ = 135^\circ + 2\cdot 360^\circ$. Por tanto,

$$\cos 855^\circ = \cos(135 + 2\cdot 360^\circ) = \cos 135^\circ = (135^\circ \text{ y } 45^\circ \text{ son suplementarios}) = -\cos 45^\circ = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$