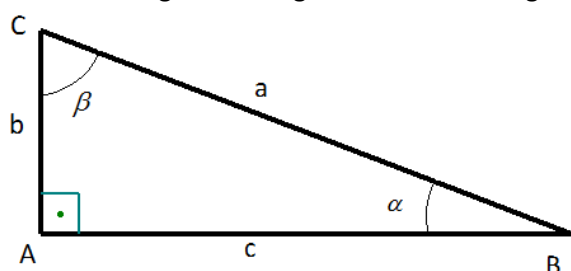


## UNIDAD 2: Trigonometría II

### 1. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolver un triángulo es conocer la longitud de cada uno de sus lados y la medida de cada uno de sus ángulos. En el caso de triángulos rectángulos, ya sabemos la medida de uno de sus ángulos,  $90^\circ$ , el ángulo recto.

Dado un triángulo rectángulo como el de la figura, se cumple que:



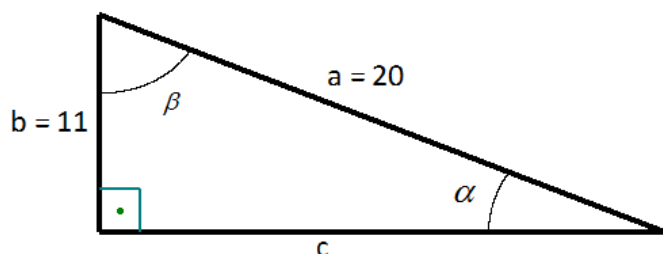
$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{a}, \operatorname{cos} \alpha = \frac{c}{a}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{c}$$

Teorema de Pitágoras:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Ejemplo: En un triángulo rectángulo se conocen un cateto  $b = 11 \text{ cm}$  y la hipotenusa  $a = 20 \text{ cm}$ . Halla los demás elementos.



Por el teorema de Pitágoras podemos calcular el otro cateto:

$$11^2 + c^2 = 20^2 \Rightarrow 121 + c^2 = 400$$

$$\Rightarrow c^2 = 279 \Rightarrow c = 16'7$$

Por la definición de seno, por ejemplo, tenemos que:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{11}{20} = 0'55 \Rightarrow$$

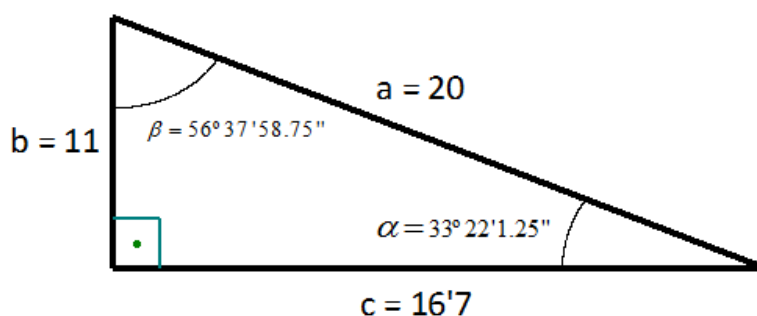
$$(\text{usando la calculadora}) \alpha = 33^\circ 22' 1.25''$$

Por último, como

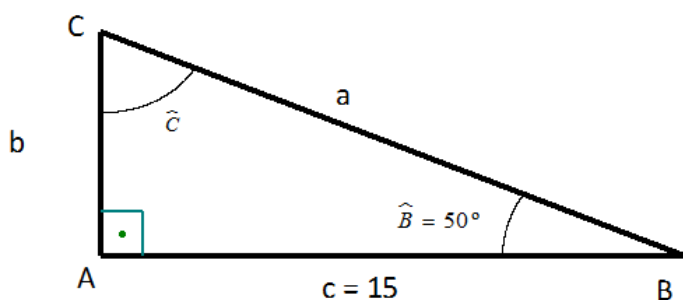
$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow 33^\circ 22' 1.25'' + \beta = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = 56^\circ 37' 58.75''$$

Ya tenemos por tanto nuestro triángulo resuelto:



Ejemplo: En un triángulo rectángulo del que se conocen  $B = 50^\circ$ , y un cateto  $c = 15 \text{ cm}$ , calcula los demás elementos.



Tenemos que:

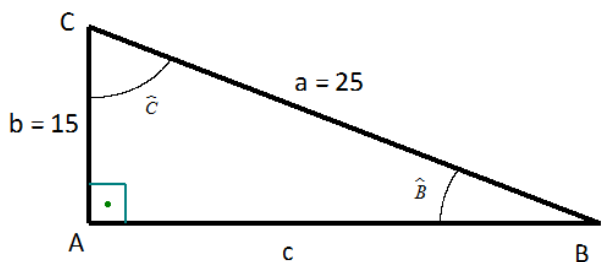
$$50^\circ + C = 90^\circ \Rightarrow C = 40^\circ$$

$$\operatorname{tg} 50^\circ = \frac{b}{15} \Rightarrow b = 15 \cdot \operatorname{tg} 50^\circ \Rightarrow b = 17'88 \text{ cm}$$

$$\operatorname{cos} 50^\circ = \frac{15}{a} \Rightarrow a = \frac{15}{\operatorname{cos} 50^\circ} \Rightarrow a = 23'34 \text{ cm}$$

**Ejemplo:** Si queremos que una cinta transportadora de 25 metros eleve una carga hasta una altura de 15 metros, ¿qué ángulo se deberá inclinar la cinta?

Tenemos una situación como la siguiente:



$a = 25$  es la longitud de la cinta transportadora

$b = 15$  es la altura que queremos que eleve el material

$B$ , es lo que queremos calcular.

Por la definición de seno,

$$\text{sen } B = \frac{15}{25} \Rightarrow \text{(usando la calculadora)} B = 36^\circ 52' 11.63''$$

Ese es el ángulo de inclinación

## 2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS

### - Razones trigonométricas de la suma de dos ángulos

Se tiene que:

$$\text{sen } (\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \text{sen } \beta$$

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta$$

$$\text{tg } (\alpha + \beta) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta}$$

**Ejemplo:** Calcula las siguientes razones trigonométricas sin usar calculadora:

a)  $\text{sen } 75^\circ = \text{sen } (45^\circ + 30^\circ) = \text{sen } 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \text{sen } 30^\circ \Rightarrow$

$$\text{sen } 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen } 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1)$$

b)  $\cos 75^\circ = \cos (45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \text{sen } 45^\circ \cdot \text{sen } 30^\circ \Rightarrow$

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)$$

c)  $\text{tg } 75^\circ = \text{tg } (45^\circ + 30^\circ) = \frac{\text{tg } 45^\circ + \text{tg } 30^\circ}{1 - \text{tg } 45^\circ \cdot \text{tg } 30^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3 + \sqrt{3}}{3}}{\frac{3 - \sqrt{3}}{3}} \Rightarrow$

$$\text{tg } 75^\circ = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \Rightarrow \text{(racionalizamos)} \text{tg } 75^\circ = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{(3 + \sqrt{3})^2}{9 - 3} \Rightarrow$$

$$\text{tg } 75^\circ = \frac{9 + 6\sqrt{3} + 3}{6} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \text{tg } 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$$

- Razones trigonométricas de la diferencia de dos ángulos

Se tiene que:

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta}$$

$$\boxed{\operatorname{cos}(\alpha - \beta) = \operatorname{cos} \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}}$$

Ejemplo: Calcula las siguientes razones trigonométricas sin usar calculadora:

d)  $\operatorname{sen} 15^\circ = \operatorname{sen}(45^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \operatorname{sen} 30^\circ \Rightarrow$

$$\operatorname{sen} 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$$

e)  $\operatorname{cos} 15^\circ = \operatorname{cos}(45^\circ - 30^\circ) = \operatorname{cos} 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \operatorname{sen} 30^\circ \Rightarrow$

$$\operatorname{cos} 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{cos} 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$$

f)  $\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \Rightarrow$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \Rightarrow (\text{racionalizamos}) \operatorname{tg} 15^\circ = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \cdot \frac{3 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{(3 - \sqrt{3})^2}{9 - 3} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{9 - 6\sqrt{3} + 3}{6} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$$

**3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE Y DEL ÁNGULO MITAD**

- Razones trigonométricas del ángulo doble

Se tiene que:

$$\boxed{\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha}$$

$$\boxed{\operatorname{cos}(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

- Razones trigonométricas del ángulo mitad

Se tiene que:

$$\boxed{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}}$$

$$\boxed{\operatorname{cos}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}}$$

(Dependiendo del cuadrante donde se encuentre  $\alpha$ , tomaremos el signo + o el - correspondiente)

Ejemplo: Sabiendo que  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-3}{4}$ , y que  $\alpha \in II$  Cuadrante, calcula:

a)  $\operatorname{sen} (2\alpha)$     b)  $\operatorname{cos} (2\alpha)$     c)  $\operatorname{tg} (2\alpha)$     d)  $\operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right)$     e)  $\operatorname{cos} \left( \frac{\alpha}{2} \right)$     f)  $\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha}{2} \right)$

Lo primero que vamos a hacer es calcular las razones correspondientes al ángulo  $\alpha$ .

$$\text{Como } 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \left( \frac{-3}{4} \right)^2 = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha} \Rightarrow \frac{25}{16} = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha} \Rightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} \Rightarrow \operatorname{cos} \alpha = \pm \frac{4}{5} \Rightarrow (\text{como } \alpha \text{ es del } 2^\circ \text{ Cuadrante, el } + \text{ no es válido}) \Rightarrow \boxed{\operatorname{cos} \alpha = -\frac{4}{5}}$$

Ahora como

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cos} \alpha = \operatorname{sen} \alpha \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \left( \frac{-3}{4} \right) \left( \frac{-4}{5} \right) \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}}$$

a)

$$\operatorname{sen} (2\alpha) = 2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} \alpha \Rightarrow \operatorname{sen} (2\alpha) = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left( -\frac{4}{5} \right) \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} (2\alpha) = -\frac{24}{25}}$$

b)

$$\operatorname{cos} (2\alpha) = \operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \Rightarrow \operatorname{cos} (2\alpha) = \left( -\frac{4}{5} \right)^2 - \left( \frac{3}{5} \right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} \Rightarrow \boxed{\operatorname{cos} (2\alpha) = \frac{7}{25}}$$

c)

$$\operatorname{tg} (2\alpha) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \left( -\frac{3}{4} \right)}{1 - \left( -\frac{3}{4} \right)^2} \Rightarrow \operatorname{tg} (2\alpha) = \frac{-\frac{6}{4}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{-\frac{6}{4}}{\frac{7}{16}} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} (2\alpha) = -\frac{24}{7}}$$

d) Como  $\alpha \in II$  Cuadrante  $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in I$  Cuadrante, y con ello podemos elegir bien los signos. Todos son positivos.

$$\operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} \alpha}{2}} \text{ (el } - \text{ no es válido pues es del I Cuadrante)} \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) = + \sqrt{\frac{1 - \left( -\frac{4}{5} \right)}{2}} \Rightarrow \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}}{2}} \Rightarrow \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \sqrt{\frac{\frac{9}{5}}{2}} \Rightarrow \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \sqrt{\frac{9}{10}} \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow (\text{racionalizamos}) \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{3\sqrt{10}}{10}}$$

$$e) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{2}} \text{ (el - no es válido pues es del I Cuadrante)} \Rightarrow$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}} \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{\frac{1}{5}}{2}} \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{10}} \Rightarrow$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \text{(racionalizamos)} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \Rightarrow \boxed{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{10}}{10}}$$

$$f) \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}} \text{ (el - no es válido pues es del I Cuadrante)} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{4}{5}\right)}{1+\left(-\frac{4}{5}\right)}} \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}} \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{\frac{9}{5}}{\frac{1}{5}}} \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{9} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 3}$$

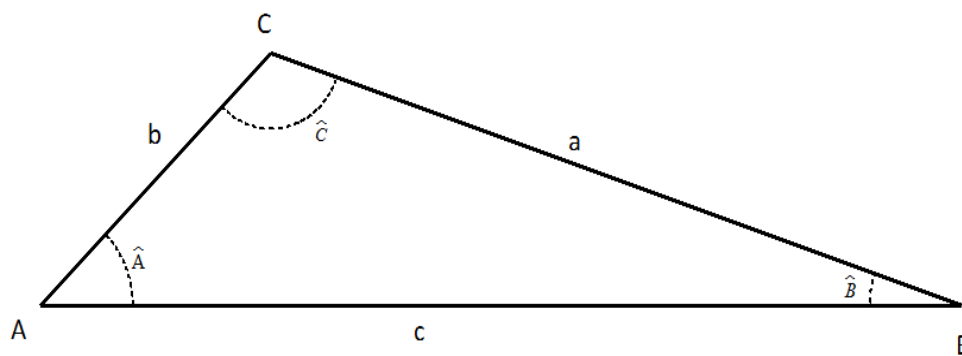
NOTA: Podíamos haber calculado la tangente por la definición, de una manera más rápida quizás

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{3\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{10}}{10}} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 3}$$

#### 4. TEOREMA DE LOS SENOS Y DEL COSENO

Estos teoremas se usan para resolver triángulos que no sean rectángulos. Será necesario el uso de la calculadora.

Teorema de los senos: En un triángulo cualquiera como el de la figura, se cumple que:



$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

O bien

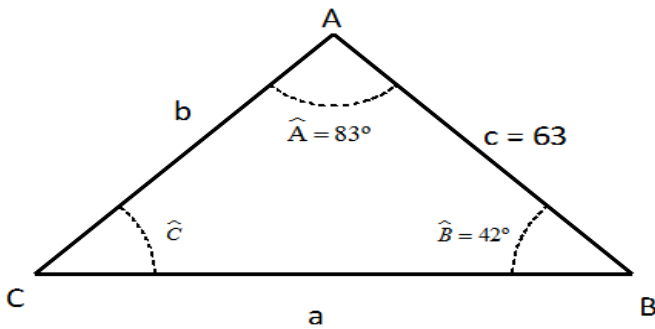
$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

Se aplica cuando conocemos:

- Dos ángulos y un lado
- Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

A veces puede haber dos soluciones, pues entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$  hay dos ángulos con el mismo seno, uno agudo y otro obtuso.

$\Delta$   
**Ejemplo:** En un triángulo  $ABC$  conocemos la longitud del lado  $c = 63$  m y los ángulos  $A = 83^\circ$  y  $B = 42^\circ$ . Resuélvelo.



Hemos dibujado el triángulo, y ahora pasamos a resolverlo.

$$A + B + C = 180^\circ \Rightarrow 83^\circ + 42^\circ + C = 180^\circ \Rightarrow C = 55^\circ$$

Aplicamos ahora el teorema de los senos:

$$\frac{a}{\sin 83^\circ} = \frac{b}{\sin 42^\circ} = \frac{63}{\sin 55^\circ} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\sin 83^\circ} = \frac{63}{\sin 55^\circ} \\ \frac{b}{\sin 42^\circ} = \frac{63}{\sin 55^\circ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{63 \cdot \sin 83^\circ}{\sin 55^\circ} \\ b = \frac{63 \cdot \sin 42^\circ}{\sin 55^\circ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 76,34 \text{ m} \\ b = 51,46 \text{ m} \end{cases}$$

**Ejemplo:** Resolver el triángulo donde conocemos  $a = 4$  m,  $b = 5$  m y  $B = 30^\circ$

Por el teorema de los senos,  $\frac{\sin A}{4} = \frac{\sin 30^\circ}{5} = \frac{\sin C}{c}$ , obtenemos de la primera igualdad que:

$$\frac{\sin A}{4} = \frac{\sin 30^\circ}{5} \Rightarrow \sin A = \frac{4 \cdot \sin 30^\circ}{5} \Rightarrow \sin A = 0,4 \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 23^\circ 34' 41,44'' \\ A_2 = 156^\circ 25' 18,56'' \end{cases} \quad \text{De estas dos posibles}$$

soluciones, la solución  $A_2 = 156^\circ 25' 18,56''$  no es válida pues en ese caso

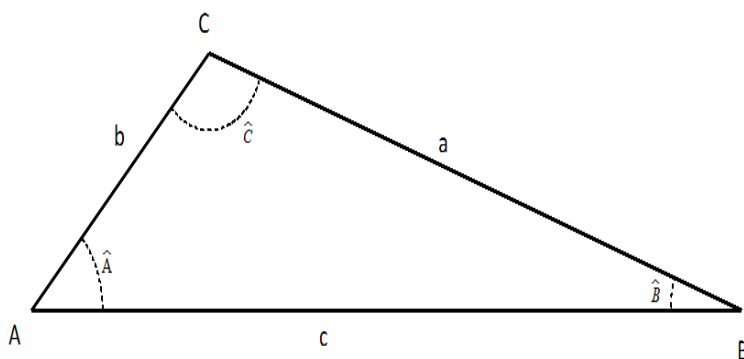
$A_2 + B + C = 156^\circ 25' 18,56'' + 30^\circ + C = 180^\circ$ , daría un ángulo  $C$  negativo y eso no es posible.

Por tanto  $A = 23^\circ 34' 41,44''$ , de ahí obtenemos  $C$ :  $23^\circ 34' 41,44'' + 30^\circ + C = 180^\circ \Rightarrow C = 126^\circ 25' 18,56''$

Por último calculamos el lado que nos falta:  $\frac{\sin 30^\circ}{5} = \frac{\sin 126^\circ 25' 18,56''}{c} \Rightarrow c = \frac{5 \cdot \sin 126^\circ 25' 18,56''}{\sin 30^\circ} \Rightarrow$

$$c = 8,05 \text{ m}$$

**Teorema del coseno:** En un triángulo cualquiera como el de la figura, se cumple que:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$

O bien

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$$

O bien

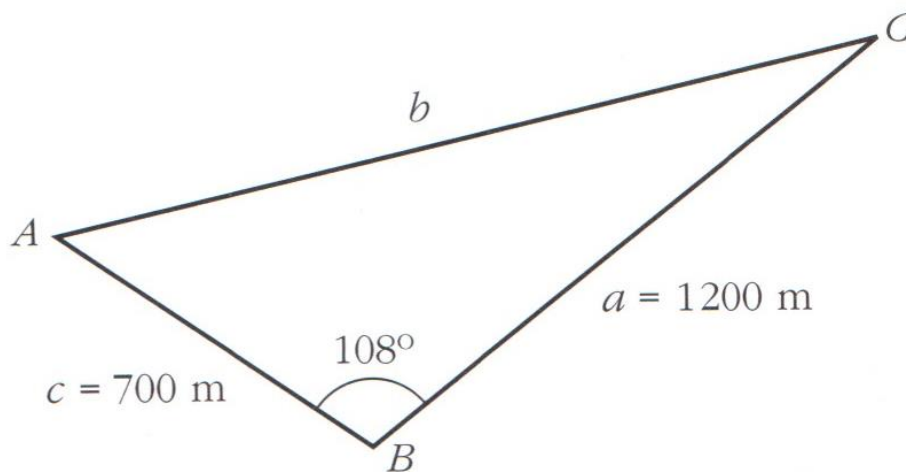
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$$

Se aplica cuando conocemos:

- Los tres lados
- Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos
- Dos lados y el ángulo que forman

Se usan conjuntamente los dos teoremas para resolver triángulos.

Ejemplo: Resuelve el triángulo de la figura:



Aplicamos el teorema del coseno para calcular el lado

$$b \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B \Rightarrow b^2 = 1200^2 + 700^2 - 2 \cdot 1200 \cdot 700 \cdot \cos 108^\circ \Rightarrow$$

$$b = \sqrt{1200^2 + 700^2 - 2 \cdot 1200 \cdot 700 \cdot \cos 108^\circ} \Rightarrow \boxed{b = 1564,98 \text{ m}}$$

Aplicamos ahora el teorema del seno para calcular el ángulo A

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \Rightarrow \frac{\sin A}{1200} = \frac{\sin 108^\circ}{1564,98} \Rightarrow \sin A = \frac{1200 \cdot \sin 108^\circ}{1564,98} \Rightarrow \sin A = 0,729 \Rightarrow A = \begin{cases} 46^\circ 49' 26'' \\ 133^\circ 10' 34'' \end{cases} \text{ Sólo}$$

es válida la solución del ángulo agudo, pues con la otra sumarían más de  $180^\circ$ . Por tanto,  $\boxed{A = 46^\circ 49' 26''}$

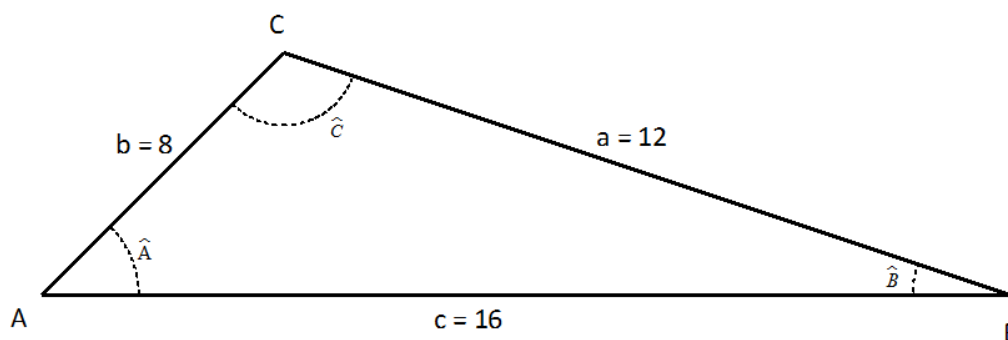
$$\text{Nos falta calcular } C = 180^\circ - 108^\circ - 46^\circ 49' 26'' \Rightarrow \boxed{C = 25^\circ 10' 34''}$$

NOTA: El cálculo del ángulo A se podía haber realizado con el teorema del coseno, así:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A \Rightarrow 1200^2 = 1564,98^2 + 700^2 - 2 \cdot 1564,98 \cdot 700 \cdot \cos A \Rightarrow$$

$$\cos A = \frac{1564,98^2 + 700^2 - 1200^2}{2 \cdot 1564,98 \cdot 700} \Rightarrow \cos A = 0,6842 \Rightarrow A = 46^\circ 49' 25.37''. \text{ No sale exactamente lo mismo por el efecto de los redondeos}$$

Ejemplo: Resuelve el siguiente triángulo:



Vamos a aplicar el teorema del coseno para calcular el ángulo B

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B \Rightarrow 8^2 = 12^2 + 16^2 - 2 \cdot 12 \cdot 16 \cdot \cos B \Rightarrow 64 = 144 + 256 - 384 \cdot \cos B \Rightarrow$$

$$64 = 400 - 384 \cdot \cos B \Rightarrow 384 \cdot \cos B = 400 - 64 \Rightarrow \cos B = \frac{336}{384} \Rightarrow \boxed{B = 28^\circ 57' 18.09''}$$

Lo mismo para el ángulo A, aunque también lo podríamos hacer por el teorema del seno, pero tendríamos que tener en cuenta que entonces nos salen dos soluciones y una sería desechable.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A \Rightarrow 12^2 = 8^2 + 16^2 - 2 \cdot 8 \cdot 16 \cdot \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{8^2 + 16^2 - 12^2}{2 \cdot 8 \cdot 16} \Rightarrow \boxed{A = 46^\circ 34' 2.87''}$$

Y por último el ángulo  $C$ , aplicando que la suma de los tres ángulos ha de ser  $180^\circ$

$$C = 180^\circ - A - B \Rightarrow C = 180^\circ - 46^\circ 34' 2.87'' - 28^\circ 57' 18.09'' \Rightarrow \boxed{C = 104^\circ 28' 39.04''}$$

## 5. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Se trata de ecuaciones donde aparecen las razones trigonométricas actuando sobre un ángulo que hay que calcular. El resultado se dará en grados o radianes según el enunciado del problema.

Para resolverlas no hay un método concreto, se trata, pues, de ir aprendiendo con la práctica y los conocimientos adquiridos. Veamos mediante ejemplos como se realiza la resolución

Ejemplo: Resuelve la ecuación trigonométrica:

$$\operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Solución: Preparamos la ecuación,  $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  Dado que el enunciado no especifica nada daremos las soluciones

en grados sexagesimales. Una solución como ya sabemos es  $x = 60^\circ$ , pero tiene más soluciones. Los ángulos suplementarios tienen el seno igual, por tanto otra solución es  $x = 120^\circ$

Podríamos terminar diciendo que las soluciones son dos  $\begin{cases} x_1 = 60^\circ \\ x_2 = 120^\circ \end{cases}$ , pero no sería del todo correcto, pues hay más

soluciones. Los ángulos que difieren un nº entero de vueltas ( $k \cdot 360^\circ$ ) tienen las mismas razones trigonométricas, es decir, los ángulos de

$$420^\circ = 60^\circ + 1 \cdot 360^\circ, 780^\circ = 60^\circ + 2 \cdot 360^\circ, 480^\circ = 120^\circ + 1 \cdot 360^\circ, 840^\circ = 120^\circ + 2 \cdot 360^\circ, -300^\circ = 60^\circ + (-1) \cdot 360^\circ, \dots$$

también tienen por seno  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Por tanto, tiene infinitas soluciones, y la forma de expresarlo matemáticamente es:

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = 60^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x_2 = 120^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}, \text{ donde } k \text{ es el nº de vueltas que da el ángulo}}$$

Este mismo ejemplo pero dando su solución en radianes sería:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi \\ x_2 = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}, \text{ que se suele poner de la siguiente forma: } \boxed{\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi \\ x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}}$$

Ejemplo: Resuelve  $\cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Solución: Los ángulos cuyo coseno es  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  y son menores que  $2 \cdot \pi$  son:  $\begin{cases} \frac{\pi}{4} \\ \frac{7 \cdot \pi}{4} \end{cases}$  (suma  $2 \cdot \pi$  con  $\frac{\pi}{4}$ ) y le hemos de

añadir las vueltas, luego:



$$\begin{cases} x_1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi \\ x_2 + \frac{\pi}{4} = \frac{7 \cdot \pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi \\ x_2 = -\frac{\pi}{4} + \frac{7 \cdot \pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 + 2 \cdot k \cdot \pi \\ x_2 = \frac{6 \cdot \pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = 2 \cdot k \cdot \pi \\ x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}}$$

**Ejemplo:** Resuelve

$$\cos 2 \cdot x = \cos x + 1$$

**Solución:** Lo primero que hacemos es convertir la ecuación trigonométrica en una ecuación donde sólo aparezcan el seno o el coseno de  $x$

$$\cos 2 \cdot x = \cos x - 1 \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \cos x - 1 \Rightarrow$$

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \cos x - 1 \Rightarrow \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = \cos x - 1 \Rightarrow 2 \cdot \cos^2 x - 1 = \cos x - 1 \Rightarrow$$

$$2 \cdot \cos^2 x = \cos x \Rightarrow 2 \cdot \cos^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (2 \cdot \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2 \cdot \cos x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x_2 = 270^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x_3 = 60^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x_4 = 300^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}}$$

**Ejemplo:** Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{3}{2} \\ 2 \cdot \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

**Solución:** Resolvemos el sistema por Gauss

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{3}{2} \\ 2 \cdot \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow (\text{hacemos } E_2 + E_1) \begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{3}{2} \\ 3 \cdot \operatorname{sen} x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{3}{2} \\ \operatorname{sen} x = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1 + \operatorname{sen} y = \frac{3}{2} \\ \operatorname{sen} x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} \\ \operatorname{sen} x = 1 \end{cases} \text{ Resolvemos ya cada ecuación:}$$

$$\operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow x_1 = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{sen} y = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 30^\circ + k \cdot 360^\circ \\ y_2 = 150^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo: Resuelve la ecuación:  $\cos x + \sec x = \frac{-5}{2}$  con  $180^\circ < x < 270^\circ$

Solución: Operamos

$$\begin{aligned} \cos x + \frac{1}{\cos x} &= \frac{-5}{2} \Rightarrow \frac{2 \cdot \cos^2 x + 2}{2 \cdot \cos x} = \frac{-5 \cdot \cos x}{2 \cdot \cos x} \Rightarrow 2 \cdot \cos^2 x + 2 = -5 \cdot \cos x \Rightarrow 2 \cdot \cos^2 x + 5 \cdot \cos x + 2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos x &= \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{-5 + 3}{4} \\ \cos x = \frac{-5 - 3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{-1}{2} \\ \cos x = -2 \text{ (no existe solución de aquí pues } -1 \leq \cos x \leq 1) \end{cases} \end{aligned}$$

Sólo nos queda:

$$\cos x = \frac{-1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 120^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x_2 = 240^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \text{ De todas estas posibles soluciones, solo hay una que cumple la condición}$$

$180^\circ < x < 270^\circ$  dada por el problema. Luego, la solución es  $x = 240^\circ$