

HOJA 2 DE EJERCICIOS
DETERMINANTES

Ejercicio 1: Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & t & 0 \\ t & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula los valores de t para los que el determinante de A es positivo y halla el mayor valor que alcanza dicho determinante.

Ejercicio 2: Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calcula la matriz inversa de A .
- Calcula A^{127} y A^{128} .
- Determina x y y tal que $A \cdot B = B \cdot A$.

Ejercicio 3: Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Halla los valores de a para los que la matriz $3A$ tiene inversa.
- Calcula, si es posible, la inversa de A^2 para $a = 0$.

Ejercicio 4: Determina la matriz X que verifica la ecuación $A \cdot X = X - B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5: Sin desarrollarlo, calcula el valor del determinante de la matriz $\begin{pmatrix} k & x & 1+ax \\ 2k & y & 2+ay \\ 3k & z & 3+az \end{pmatrix}$ y enuncia las propiedades que hayas usado.

Ejercicio 6: Sea $A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x & 0 \\ \cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} x + \cos x & \operatorname{sen} x - \cos x & 1 \end{pmatrix}$, ¿para qué valores de x existe la matriz inversa de A ?

Calcula dicha matriz inversa.

Ejercicio 7: Determina la matriz X tal que $A \cdot X - 3 \cdot B = \theta$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8: Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calcula el determinante de las matrices $2A$, A^{31} y $(A^{31})^{-1}$
- Halla la matriz A^{-1}

Ejercicio 9: Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$.

- Determina para qué valores del parámetro λ , la matriz A no tiene inversa.
- Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $\lambda = -2$.

Ejercicio 10: Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Calcula el rango de A dependiendo de los valores de α .
- Para $\alpha = 2$, resuelve la ecuación matricial $AX = B$.

Ejercicio 11: Sean A y B dos matrices que verifican:

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Halla las matrices $(A+B)(A-B)$ y $A^2 - B^2$.
- Resuelve la ecuación matricial $XA - XB - (A+B)^t = 2I$

Ejercicio 12: Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$

- Determina los valores de λ para los que la matriz $A - 2I$ tiene inversa.
- Para $\lambda = -2$, resuelve la ecuación matricial $AX = 2X + I$.

Ejercicio 13: Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 cuyos determinantes son $|A| = \frac{1}{2}$ y $|B| = -2$,

halla:

- $|A^3|$
- $|A^{-1}|$
- $|-2A|$
- $|A \cdot B^t|$
- El rango de B

Ejercicio 14: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

- Demuestra que se verifica $A^3 = I$.
- Justifica que A es invertible y halla su inversa.
- Calcula razonadamente A^{100} .

Ejercicio 15: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, sea B la matriz que verifica que $A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

- Comprueba que las matrices A y B poseen inversas.
- Resuelve la ecuación matricial $A^{-1}X - B = BA$.

Ejercicio 16: De la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, se sabe que $\det(A) = 4$.

- Halla $\det(-3A^t)$ y $\det \begin{pmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{pmatrix}$
- Calcula $\det(A^{-1} \cdot A^t)$.
- Si B es una matriz cuadrada tal que $B^3 = I$, halla $\det(B)$.

Ejercicio 17: Sean F_1, F_2 y F_3 las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz B de orden 3, cuyo determinante vale -2. Calcula, indicando las propiedades que utilices:

- El determinante de B^{-1} .
- El determinante de $(B^t)^4$.
- El determinante de $2B$.
- El determinante de una matriz cuadrada cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $5F_1 - F_3, 3F_3$ y F_2 .

Ejercicio 18: Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = A - kI$, donde k es una constante e I la matriz identidad de orden 2.

- Determina los valores de k para los que B no tiene inversa.
- Calcula B^{-1} para $k = -1$.
- Determina las constantes α y β para los que se cumple $A^2 + \alpha A = \beta I$.

Ejercicio 19: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}$

- Estudia el rango de A en función de los valores del parámetro k .
- Para $k = 0$, halla la matriz inversa de A .

Ejercicio 20: Sabiendo que $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$, calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes

determinantes:

a) $|-3A|$ y $|A^{-1}|$.

b) $\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ d & e & d-f \\ g & h & g-i \end{vmatrix}$.