

HOJA 6 DE EJERCICIOS
INTEGRALES DEFINIDAS

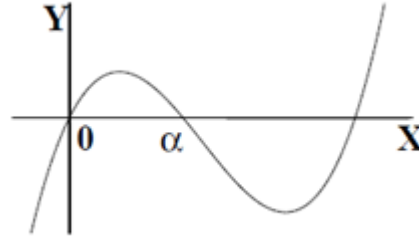
Ejercicio 1: Consideremos $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

a) Si f fuese la función cuya gráfica aparece en el dibujo, indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando la respuesta:

i) $F(\alpha) = 0$

ii) $F'(\alpha) = 0$

iii) F es creciente en $(0, \alpha)$



b) Calcula $F(1)$ siendo $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$

Ejercicio 2: Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x|x-4|$.

a) Esboza la gráfica de f .

b) Estudia la derivabilidad en $x = 4$.

c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Ejercicio 3: Determina un polinomio $P(x)$ de segundo grado sabiendo que:

$$P(0) = P(2) = 1 \quad \text{y} \quad \int_0^2 P(x) dx = \frac{1}{3}$$

Ejercicio 4: Calcula $\int_0^1 \frac{3x^3 + 1}{x^2 - x - 2} dx$

Ejercicio 5: Esboza el recinto limitado por los ejes coordenados y las gráficas de las funciones $y = 1$ e $y = \ln(x)$. Calcula su área.

Ejercicio 6: Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x e^{-x}$. Esboza el recinto limitado por la curva $y = f(x)$, los ejes coordenados y la recta $x = -1$. Calcula su área.

Ejercicio 7: Esboza el recinto limitado por la gráfica de la parábola $y = -(x-2)^2 - 2$, la recta tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisa $x = 3$, el semieje positivo de abscisas y el semieje negativo de ordenadas. Calcula su área.

Ejercicio 8: Se quiere dividir la región plana encerrada entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$ en dos regiones de igual área mediante una recta $y = a$. Halla el valor de a .

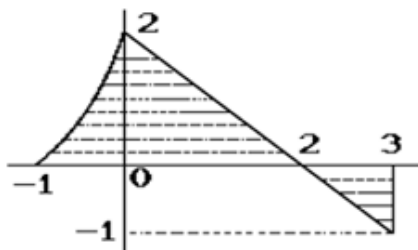
Ejercicio 9: Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 5x+10 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

- Esboza la gráfica de f .
- Calcula el área de la región limitada por la gráfica de f , el eje de abscisas y la recta $x = 3$.

Ejercicio 10: Halla el área del recinto rayado que aparece en la figura adjunta sabiendo que la parte curva tiene

como ecuación $y = \frac{2x+2}{1-x}$



Ejercicio 11: Considera la función $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a(x-1) & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ x \cdot \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Determina el valor de a sabiendo que f es derivable.
- Calcula $\int_0^2 f(x) dx$

Ejercicio 12: Calcula el área encerrada entre la curva $y = x^3 - 4x$ y el eje de abscisas.

Ejercicio 13: Calcula el valor de $b > 0$, sabiendo que el área comprendida entre la curva $y = \sqrt{x}$ y la recta $y = bx$ es de $\frac{4}{3}$ de unidades cuadradas.

Ejercicio 14: Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ y $g(x) = x^2 - 1$

- Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -2$
- Esboza el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y la recta $y = x + 5$. Calcula el área de este recinto.

Ejercicio 15: Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = 4 - 3|x|$ y $g(x) = x^2$

- Esboza las gráficas de f y g . Determina sus puntos de corte.
- Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g .

Ejercicio 16: Calcula $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos(x) dx$

Ejercicio 17: Sea $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \ln(x+1)$.

- Esboza el recinto limitado por la gráfica de f , el eje OY y la recta $y = 1$. Calcula los puntos de corte de las gráficas.
- Halla el área del recinto anterior.

Ejercicio 18: Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 - 4x$

- Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.
- Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = -x - 2$, determinando los puntos de corte de ambas gráficas.
- Calcula el área del recinto anterior.

Ejercicio 19: Sea $I = \int_0^1 \frac{x}{1 + \sqrt{1-x}} dx$

- Expresa la integral I aplicando el cambio de variable $t = \sqrt{1-x}$.
- Calcula el valor de I .

Ejercicio 20: Sea f una función continua en el intervalo $[2, 3]$ y F una función primitiva de f tal que $F(2) = 1$ y $F(3) = 2$. Calcula;

a) $\int_2^3 f(x) dx$ b) $\int_2^3 (5f(x) - 7) dx$ c) $\int_2^3 (F(x))^2 f(x) dx$

Ejercicio 21: Sea la función f definida por $f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$ para $x \neq \pm 1$

- Halla una primitiva de f .
- Calcula el valor de k para que el área del recinto limitado por el eje de abscisas y la gráfica de f en el intervalo $[2, k]$ sea $\ln(2)$.

Ejercicio 22: Calcula los valores de a y b sabiendo que la función $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$f(x) = ax^2 + b \ln(x)$ tiene un extremo relativo en $x = 1$ y que $\int_1^4 f(x) dx = 27 - 8 \ln(4)$

Ejercicio 23: Calcula el valor de $a > 0$ sabiendo que el área del recinto comprendido entre la parábola $y = x^2 + ax$ y la recta $y + x = 0$ vale 36 unidades cuadradas.

Ejercicio 24: Calcula $\int_0^{\pi^2} \text{sen}(\sqrt{x}) dx$

Ejercicio 25: Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a \cdot \text{sen}(x) + bx^2 + cx + d$, determina los valores de las constantes a, b, c y d sabiendo que la gráfica de f tiene tangente horizontal en el punto $(0, 4)$ y que la segunda derivada de f es $f''(x) = 3 \text{sen}(x) - 10$

Ejercicio 26: Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = x^2 + |x|$, $g(x) = 2$.

- Determina los puntos de corte de f y g . Esboza dichas gráficas
- Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas.