SOLUCIONES

EXAMEN ANÁLISIS: UNIDADES 1, 2 Y 3
2º BACH. C

Cuestión 1.-

Tenemos que fabricar dos chapas cuadradas con dos materiales distintos. El precio de cada uno de estos materiales es 2 y 3 euros por **centímetro cuadrado**, respectivamente. Por otra parte, la suma de los perímetros de los dos cuadrados tiene que ser 1 **metro**. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo?

Solución

Tomamos obviamente como variables los lados de cada chapa cuadrada (aunque alguno eligió el perímetro de cada chapa, que se puede hacer, tomando después como lado la cuarta parte del perímetro)
x = lado de la chapa cuadrada de precio 2 €/cm^2 → Su perímetro es 4x
y = lado de la chapa cuadrada de precio 3 €/cm^2 → Su perímetro es 4y

La ligadura es: 4x + 4y = 100 (¡ojo! Vamos a usar como unidad el cm.) → (simplificando) x + y =25
La función a optimizar (en este caso, minimizar) es $C(x,y)=2\cdot x^2+3\cdot y^2$
De la ligadura sacamos $x=25-y$ y sustituimos en la función, teniendo ya una función con una sola variable.
$C(y)=2\cdot(25-y)^2+3\cdot y^2$, además la variable y tiene que ser ≥ que 0 (no hay medidas negativas) pero también ≤ 25 (pues si fuera mayor x sería negativa)
Derivamos la función a optimizar: $C'(y)=2\cdot 2\cdot(25-y)\cdot(-1)+3\cdot 2\cdot y \rightarrow C'(y)=-100+10y$
Igualamos a 0: $-100+10y=0 \rightarrow y=10$
Usamos el criterio de la derivada 2ª: $C''(y)=10 \rightarrow C''(10)=10>0 \rightarrow$ $y=10$ es un mínimo relativo.
Dado que $y\in[0,25]$, puede que tenga el mínimo en los extremos del intervalo para ello vemos el valor de la función $C(y)$ en $y=0, y=10, y=25 \rightarrow \begin{cases} C(0)=2\cdot 25^2=1250 \\ C(10)=2\cdot 15^2+3\cdot 10^2=750 \\ C(25)=3\cdot 25^2=1875 \end{cases}$ El mínimo absoluto está en $y=10$

Y por tanto: $x=15 \rightarrow$ SOLUCIÓN: $x=15$; $y=10$

Cuestión 2.-

Sea $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2\mathrm{Ln}(x)$ (Ln denota la función logaritmo neperiano).

(a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

(b) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=\sqrt{e}$.

Solución

(a) Derivamos la función: $f'(x)=2x\ln(x)+x^2\cdot\frac{1}{x} \rightarrow f'(x)=2x\ln(x)+x$

Igualamos a 0 la derivada: $2x\ln(x)+x=0 \rightarrow x(2\ln(x)+1)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ No válido pues el dominio es } (0,+\infty) \\ 2\ln(x)+1=0 \rightarrow \ln x=\frac{-1}{2} \rightarrow x=e^{-1/2} \end{cases}$

Construimos la tabla de signos de f':

	$\left(0,e^{-1/2}\right)$ (aquí podemos tomar e^{-5} por ejemplo o usar la calculadora)	$\left(e^{-1/2},+\infty\right)$ (aquí podemos tomar e^{5} por ejemplo o usar la calculadora)

$2\ln(x)+1$ (no hace falta poner toda la derivada $f'(x)=x(2\ln(x)+1)$ pues $x>0$)	**-**	+
	Decreciente $\downarrow$	Creciente $\uparrow$

Tenemos por tanto:

- f decreciente en $\left(0, e^{-1/2}\right)$
- f creciente en $\left(e^{-1/2}, +\infty\right)$
- En $x_0 = e^{-1/2}$ tiene un mínimo relativo (en este caso es además absoluto) y el valor que alcanza es

$$f\left(e^{\frac{-1}{2}}\right) = \left(e^{\frac{-1}{2}}\right)^2 \cdot \ln\left(e^{\frac{-1}{2}}\right) \rightarrow f\left(e^{\frac{-1}{2}}\right) = e^{-1} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \rightarrow f\left(e^{\frac{-1}{2}}\right) = \frac{-1}{2e}$$

(b) De forma general la ecuación de la tangente es: $t \equiv y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot/ x - x_0)$. Aquí $x_0 = \sqrt{e} = e^{1/2}$

$$f(\sqrt{e}) = \left(\sqrt{e}\right)^2 \cdot \ln\left(\sqrt{e}\right) \rightarrow f(\sqrt{e}) = \frac{e}{2}$$

$$f'(\sqrt{e}) = 2\cdot\sqrt{e}\cdot\ln\left(\sqrt{e}\right) + \sqrt{e} \rightarrow f'(\sqrt{e}) = 2\cdot\sqrt{e}\cdot\frac{1}{2} + \sqrt{e} \rightarrow f'(\sqrt{e}) = 2\cdot\sqrt{e}$$

Así la recta tangente es: $t \equiv y - \dfrac{e}{2} = 2\sqrt{e}\cdot(x - \sqrt{e})$

Cuestión 3.-

Sea la función $f : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \\ cx + 1 & \text{si} \quad 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

(a) Determina a, b y c sabiendo que f es continua en el intervalo cerrado $[0,4]$, derivable en el intervalo abierto $(0,4)$ y que $f(0) = f(4)$.

(b) ¿En qué punto del intervalo se anula la derivada de la función?

Solución

(a) Tenemos que:

- Como f es continua en [0,4], en particular ha de serlo en $x_0 = 2$, por tanto $f(2) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

$$f(2) = 2c+1$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (cx+1) = 2c+1$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(x^2 + ax + b\right) = 4 + 2a + b$$

Luego: $2c + 1 = 4 + 2a + b \quad (*_1)$

- Como f es derivable en (0,4), en particular ha de serlo en $x_0 = 2$. Tenemos que

$f'(x) = \begin{cases} 2x+a & si \quad 0<x<2 \\ c & si \quad 2<x<4 \end{cases}$, En $x_0 = 2$, se tiene que cumplir que $\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f'(x)$ para que sea derivable, puesto que ya es continua.

$$\lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} c = c$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (2x+a) = 4+a$$

Luego: $c = 4+a$ $(*_2)$

- Como $f(0) = f(4) \rightarrow b = 4c+1$ $(*_3)$

Resolvemos las ecuaciones $(*_1)$, $(*_2)$ y $(*_3)$ $\rightarrow \begin{cases} 2c+1 = 4+2a+b \\ c = 4+a \\ b = 4c+1 \end{cases}$ (os lo dejo a vosotros la resolución)

La solución es: $\begin{array}{l} a=-3 \\ b=5 \\ c=1 \end{array}$

(b) Usando los valores obtenidos en el apartado anterior:

$f'(x) = \begin{cases} 2x-3 & si \quad 0<x<2 \\ 1 & si \quad 2\le x<4 \end{cases}$ (fijaos que ya hemos puesto el 2 en la derivada pues sabemos que es derivable)

Sólo se puede anular entre (0,2) $\rightarrow$ $2x-3=0 \rightarrow x = \dfrac{3}{2}$ que es una solución válida pues está en el intervalo (0,2)

Cuestión 4.-

Calcula el siguiente límite (ln denota logaritmo neperiano),

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{2}{x^2-1}\right)$$

Solución

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{2}{x^2-1}\right)$, si sustituimos por 1 nos resulta $\dfrac{1}{0} - \dfrac{2}{0} = \infty - \infty$, que es una indeterminación. Efectuamos la diferencia de fracciones con el común denominador para transformarla en una indeterminación $\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{2}{x^2-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-1-2\ln(x)}{(x^2-1)\ln(x)}\right)$ = (aplicamos la regla de L'Hôpital, pues es indeterminación $\dfrac{0}{0}$)

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x - \dfrac{2}{x}}{2x\cdot\ln(x) + (x^2-1)\dfrac{1}{x}}\right)$ =(operamos un poco y simplificamos)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{2x^2-2}{x}}{\frac{2x^2\cdot\ln(x)+\left(x^2-1\right)}{x}}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x^2-2}{2x^2\cdot\ln(x)+\left(x^2-1\right)}\right)=$$ (vuelve a ser $\frac{0}{0}$ y aplicamos la regla de L'Hôpital) =

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{4x}{4x\cdot\ln(x)+2x^2\cdot\frac{1}{x}+2x}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{4x}{4x\cdot\ln(x)+4x}\right)=\frac{4}{4}=\boxed{1}$$