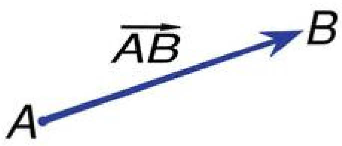
1. VECTOR LIBRE. OPERACIONES CON VECTORES LIBRES

En este curso vamos a trabajar con el espacio vectorial de dimensión 3, $\Re^3$, que es similar al tratado en 1º de Bachillerato, sólo que con una componente o coordenada más, z. En $\Re^3$, los vectores y los puntos son de la forma (x, y, z)

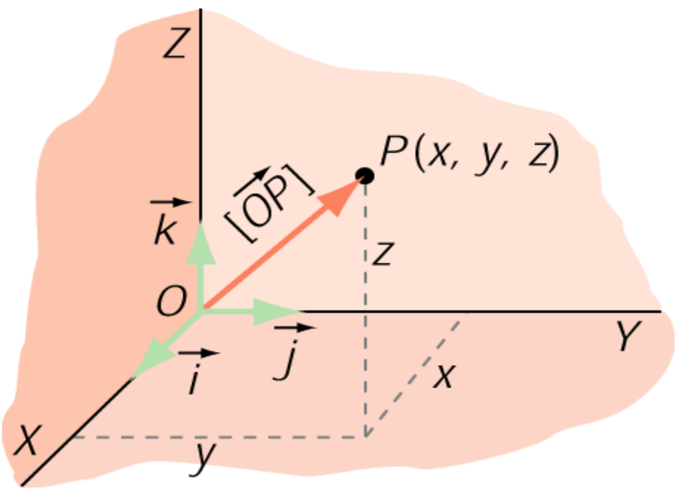
Definición: Un vector fijo de origen el punto A y extremo el punto B, es un segmento orientado caracterizado por:

- Dirección, que es la recta que contiene al vector
- Sentido u orientación de la recta, en este caso de A hacia B
- Módulo o longitud del segmento orientado



La flecha indica el sentido y el módulo es la distancia entre A y B

En el espacio los puntos tienen 3 coordenadas y vamos a utilizar un sistema de referencia ortonormal, formado por los vectores $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ y $\vec{k} = (0,0,1)$ (son unitarios y perpendiculares entre si) y el origen O, como vemos en la imagen



Llamamos *coordenadas de un vector fijo* $\vec{AB}$ de origen el punto A(a, b, c) y extremo el punto B(d, e, f) a los números que se obtienen de restar a las coordenadas del extremo las coordenadas del origen:

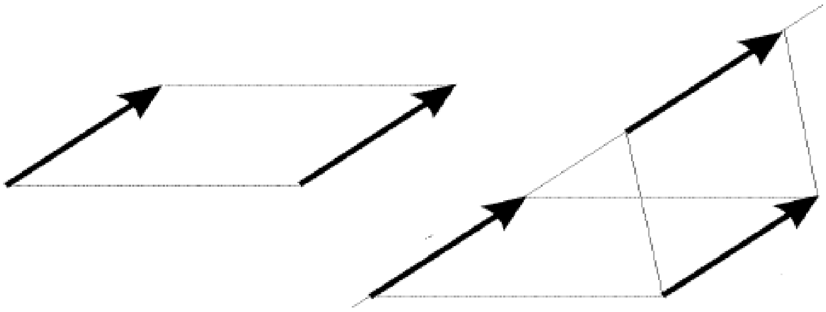
$$\vec{AB} = (d - a,\ e - b,\ f - c)$$

Ejemplo: Dados los puntos P(2, 1, -2) y Q(-1, 0, -3) tenemos que $\vec{PQ}$ =(-1-2, 0-1, -3-(-2)) = (-3, -1, -1)

El módulo de un vector fijo $\vec{AB}$ = (d - a, e – b, f – c), que se nota por $\left|\vec{AB}\right|$, se obtiene mediante el teorema de Pitágoras y es: $\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(d-a)^2 + (e-b)^2 + (f-c)^2}$

Ejemplo: Dado el vector fijo $\vec{PQ}$=(2, 1, -3), tenemos que $\left|\vec{PQ}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$

Definición: Llamaremos vector libre al conjunto de todos los vectores fijos que tienen igual módulo, dirección y sentido (vectores fijos equipolentes). Se representa por $\left[\vec{AB}\right]$, pero por comodidad no pondremos los corchetes y usaremos la misma notación que la de vector fijo $\vec{AB}$. Todos los vectores fijos del dibujo son un solo vector libre



Las coordenadas de un vector libre son las coordenadas de uno cualquiera de sus representantes o vector fijo. Y el módulo de un vector libre es el módulo de uno cualquiera de sus vectores fijos.

Los vectores libres se suelen notar por $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$

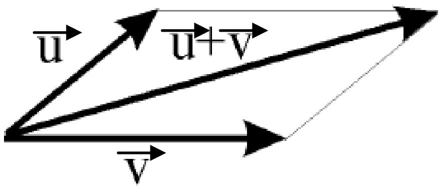
Así si $\vec{u} = (a,b,c) \rightarrow \left|\vec{u}\right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Los vectores libres que tienen módulo 1 se les llama unitarios

OPERACIONES CON VECTORES LIBRES

A: Suma de vectores

Dados dos vectores $\vec{u} = (a,b,c)$ y $\vec{v} = (d,e,f)$, se define el *vector suma* como $\vec{u} + \vec{v} = (a+d, b+e, c+f)$
La suma de vectores se puede hacer gráficamente aplicando la regla del paralelogramo.



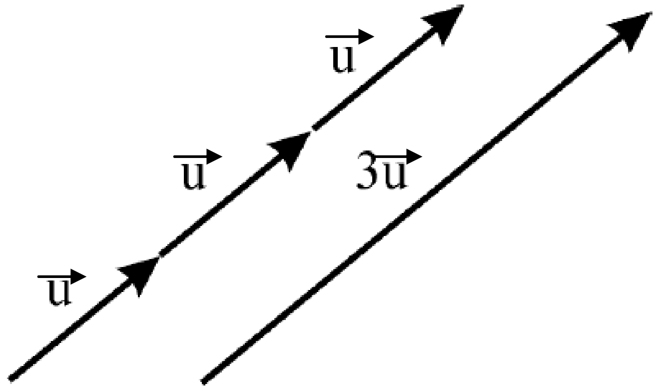
La suma de vectores tiene las siguientes propiedades:

- Asociativa: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
- Elemento neutro: El vector nulo $\vec{0} = (0,0,0)$
- Elemento opuesto: El vector opuesto de $\vec{u} = (a,b,c)$ es $-\vec{u} = (-a,-b,-c)$
- Conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

B: Producto de un número real por un vector

Dado un nº real k y un vector $\vec{u} = (a,b,c)$, tenemos el vector $k\vec{u} = (k{\cdot}a, k{\cdot}b, k{\cdot}c)$ que verifica que:

- Tiene la misma dirección que $\vec{u}$
- Si $k > 0$ tiene el mismo sentido que $\vec{u}$, y si $k < 0$ tiene sentido opuesto a $\vec{u}$
- El módulo de $k\vec{u}$ es igual la valor absoluto de k por el módulo de $\vec{u}$ → $\left|k\vec{u}\right| = |k| \cdot \left|\vec{u}\right|$



Como propiedades tenemos:

- Distributiva del producto respecto de la suma de vectores: $k\cdot\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=k\,\vec{u}+k\,\vec{v}$
- Distributiva de la suma de números reales por un vector: $(k+p)\cdot\vec{u}=k\,\vec{u}+p\,\vec{u}$
- Asociatividad mixta: $(k\cdot p)\vec{u}=k\cdot\left(p\cdot\vec{u}\right)$
- Elemento neutro: $1\cdot\vec{u}=\vec{u}$

Al cumplir el conjunto de vectores libres del espacio $\Re^3$ estas propiedades decimos que tiene estructura de espacio vectorial.

2. <u>**DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA DE VECTORES. BASES**</u>

<u>**Definición**</u>: Dados dos vectores $\vec{u}=(a,b,c)$ y $\vec{v}=(a',b',c')$ diremos que son <u>*linealmente dependientes*</u> si son proporcionales, es decir tienen la misma dirección. O lo que es lo mismo $\vec{u}=(a,b,c)$ y $\vec{v}=(a',b',c')$ son linealmente dependientes si y sólo si $rango\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=1$

<u>**Definición**</u>: Dados dos vectores $\vec{u}=(a,b,c)$ y $\vec{v}=(a',b',c')$ diremos que son <u>*linealmente independientes*</u> si no son proporcionales, es decir no tienen la misma dirección. O lo que es lo mismo $\vec{u}=(a,b,c)$ y $\vec{v}=(a',b',c')$ son linealmente independientes si y sólo si $rango\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=2$

<u>**Definición**</u>: Dados tres vectores $\vec{u}=(a,b,c)$, $\vec{v}=(a',b',c')$ y $\vec{w}=(a'',b'',c'')$ diremos que son <u>*linealmente dependientes*</u> si alguno de ellos es combinación lineal de los demás. O lo que es lo mismo $\vec{u}=(a,b,c)$, $\vec{v}=(a',b',c')$ y $\vec{w}=(a'',b'',c'')$ son linealmente dependientes si y sólo si $rango\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}\le 2$

Definición: Dados tres vectores $\vec{u}=(a,b,c)$, $\vec{v}=(a',b',c')$ y $\vec{w}=(a'',b'',c'')$ diremos que son *linealmente independientes* si ninguno de ellos es combinación lineal de los demás. O lo que es lo mismo $\vec{u}=(a,b,c)$, $\vec{v}=(a',b',c')$ y $\vec{w}=(a'',b'',c'')$ son linealmente independientes si y sólo si $rango\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}=3$

Definición: Una base de $\Re^3$ es un conjunto de vectores linealmente independientes y que a partir de ellos se puede obtener cualquier otro vector del espacio vectorial $\Re^3$, es decir, cualquier vector de $\Re^3$ se puede poner como combinación lineal de los vectores de la base.

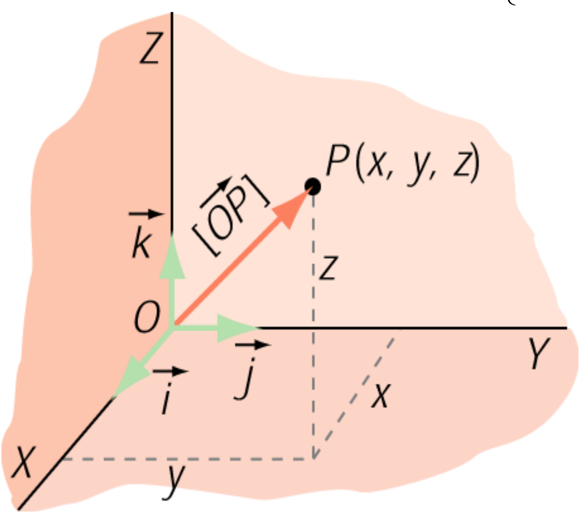
Propiedad: Tres vectores linealmente independientes en $\Re^3$ forman una base.

Nosotros usaremos la base canónica $B_c=\left\{\vec{i}=(1,0,0),\ \vec{j}=(0,1,0),\ \vec{k}=(0,0,1)\right\}$

Cuando decimos que las coordenadas de un vector libre son $\vec{u}=(a,b,c)$ respecto de la base canónica, en realidad lo que estamos diciendo es que $\vec{u}=a\cdot\vec{i}+b\cdot\vec{j}+c\cdot\cdot\vec{k}$

3. SISTEMAS DE REFERENCIA

Los puntos y objetos del espacio siempre van a venir referidos a un sistema de referencia como dijimos al principio del tema. Vamos a usar el sistema de referencia cartesiano formado por la base canónica y por un punto origen O. Lo notaremos así $R=\left\{O=(0,0,0);B_c=\left\{\vec{i}=(1,0,0),\ \vec{j}=(0,1,0),\ \vec{k}=(0,0,1)\right\}\right\}$



Como vemos en el dibujo el punto $P(x,y,z)$ viene unívocamente determinado por el vector de posición $\vec{OP}=(x,y,z) = x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\cdot\vec{k}$

Así además, como ya sabemos dados dos puntos $A(x,y,z)$ y $B(x',y',z')$, el vector libre que determinan es $\vec{AB}=(x'-x,y'-y,z'-z)$ que se obtiene porque: $\vec{OA}+\vec{AB}=\vec{OB} \rightarrow \vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA} = (x',y',z')-(x,y,z)$

Y de aquí la expresión "punto extremo" menos "punto origen"

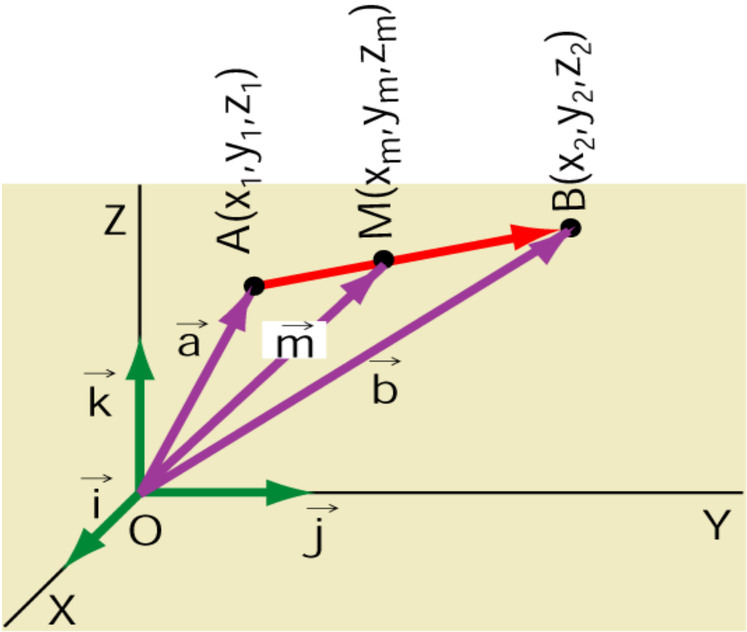
Coordenadas del punto medio de un segmento

Dado un segmento de extremos $A(x_1, y_1, z_1)$ con vector de posición $\vec{a} = \vec{OA}$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ con vector de posición $\vec{b} = \vec{OB}$, vamos a calcular las coordenadas del punto medio $M(x_m, y_m, z_m)$ con vector de posición $\vec{m} = \vec{OM}$. Tenemos la igualdad vectorial, $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$ →(y como vemos $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB}$, sustituyendo)

$\vec{OM} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AB}$ → $(x_m, y_m, z_m) = (x_1, y_1, z_1) + \frac{1}{2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ →(operando nos queda)

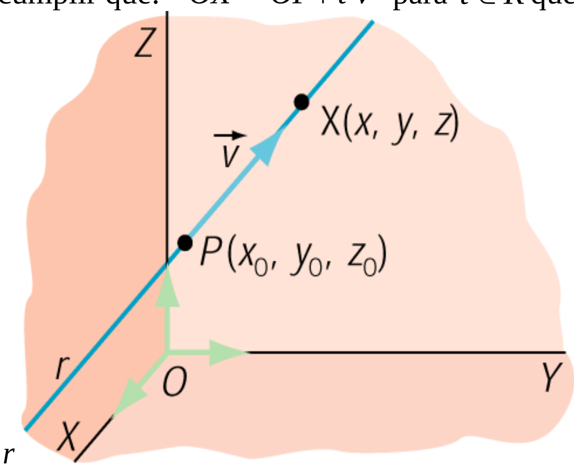
$$\boxed{(x_m, y_m, z_m) = \left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}, \frac{z_2 + z_1}{2}\right)}$$

Las coordenadas del punto medio de un segmento son la semisuma de las coordenadas de los extremos.



4. **ECUACIONES DE LA RECTA**

Una recta, al igual que vimos el año pasado, viene determinada por un punto por donde pasa $P(x_0, y_0, z_0)$ y un vector director $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y como vemos en el dibujo cualquier punto $X(x, y, z)$ de la recta r ha de cumplir que: $\vec{OX} = \vec{OP} + t \cdot \vec{v}$ para $t \in R$ que es la llamada ecuación vectorial de la recta



ECUACIÓN VECTORIAL DE UNA RECTA: $r \equiv \vec{OX} = \vec{OP} + t \cdot \vec{v}$ con $t \in R$

A partir de esta ecuación operando en coordenada s obtenemos las demás ecuaciones que son:

ECUACIONES PARAMÉTRICAS

$$r \equiv \begin{cases} x = x_0 + t \cdot v_1 \\ y = y_0 + t \cdot v_2 \\ z = z_0 + t \cdot v_3 \end{cases} \text{ con } t \in R$$

ECUACIONES CONTINUAS

Se obtienen despejando el parámetro t de cada una de las paramétricas e igualando entre si:

$$r \equiv \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

ECUACIONES IMPLÍCITAS

Son dos ecuaciones, que se obtiene despejando el parámetro t de una de las paramétricas y sustituyendo en las otras dos, o bien, a partir de las continuas desarrollando la doble igualdad.

$$r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \end{cases}$$

Es muy importante entender que las ecuaciones implícitas de una recta en el espacio, si le damos una interpretación algebraica, no es otra cosa que un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas, y que debe ser un sistema compatible indeterminado, que al resolverlo lo que obtenemos son las ecuaciones paramétricas de la recta.

NOTA: También una recta viene unívocamente determinada por dos puntos por donde pasa, $A(a,b,c)$ y $B(a',b',c')$, pues podemos obtener sin más el vector director que es $\vec{v} = \vec{AB} = (a'-a, b'-b, c'-c)$

Ejemplo: Hallar las ecuaciones de la recta r que pasa por el punto A(0, 2, -3) y tiene por vector director $\vec{v} = (4,-6,8)$

Lo primero que hemos de tener en cuenta es que como vector director es mejor tomar el vector $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} = (2,-3,4)$, que nos da la misma dirección para la recta y es más simple, con lo cual los posibles cálculos serán menos complejos.

Ecuaciones paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$ con $t \in R$

Ecuación continua: Despejamos t de cada una de las ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} t = \frac{x}{2} \\ t = \frac{y-2}{-3} \\ t = \frac{z+3}{4} \end{cases}$ y ahora las igualamos

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{4}$$

Ecuaciones implícitas: Vamos a obtenerlas a partir de las continuas, de la doble igualdad podemos establecer:

$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} \\ \frac{x}{2} = \frac{z+3}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3x = 2y-4 \\ 4x = 2z+6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3x-2y=-4 \\ 4x-2z=6 \end{cases}$ →(cambiamos de signo la 1ª ecuación y simplificamos por 2 la 2ª)→ $r \equiv \begin{cases} 3x+2y=4 \\ 2x-z=3 \end{cases}$

Ejemplo: Lo mismo para la recta que pasa por los puntos A(1,1,-1) y B(-1,1,2).

En este caso nos falta conocer el vector director. Como sabemos es el vector $\vec{v} = \vec{AB} = (-2,0,3)$ y ya actuamos igual que en el ejemplo anterior, tomando como punto A o B. Os dejo a vosotros la realización

Ejemplo: Dada la recta $r \equiv \begin{cases} 2x-y+z=0 \\ 3x+y+2z=1 \end{cases}$ Se pide:

a) Obtener sus ecuaciones paramétricas y continuas
b) Dar 3 puntos de la recta.

a)
Vamos a resolver el sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas asociado, que se puede ver fácilmente que es un SCI, pues el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ → rango(matriz coeficientes) = 2 = rango(matriz ampliadada) < nº incógnitas. Parametrizamos la incógnita que no estaba en el menor, $z = \lambda$, y sustituimos:

$\begin{cases} 2x-y=-\lambda \\ 3x+y=1-2\lambda \end{cases}$ → (resolvemos por Cramer o Gauss, usamos Gauss que parece más fácil, haciendo $E_2 + E_1$)→ $\begin{cases} 2x-y=-\lambda \\ 5x=1-3\lambda \end{cases}$ → De E_2 despejamos x: $x = \frac{1-3\lambda}{5}$. Sustituimos en la E_1 y obtenemos y: $y = 2\frac{1-3\lambda}{5} + \lambda$ →

$y = \frac{2-\lambda}{5}$ Y por tanto las ecuaciones paramétricas de la recta es: $\boxed{r \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}\lambda \\ y = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\lambda \quad \text{con } \lambda \in R \\ z = \lambda \end{cases}}$. Como vemos ya tenemos un punto por donde pasa la recta $P\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$ y un vector director $\vec{v} = \left(\frac{-3}{5}, \frac{-1}{5}, 1\right)$. Podemos considerar otros vectores directores que nos resulten más cómodos para el cálculo, como por ejemplo, $\vec{u} = 5 \cdot \vec{v} = (-3,-1,5)$, así por ejemplo tendríamos otras ecuaciones paramétricas de la recta, pero totalmente válidas: $\boxed{r \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{5} - 3\lambda \\ y = \frac{2}{5} - 1\lambda \quad \text{con } \lambda \in R \\ z = 5\lambda \end{cases}}$

OBSERVACIÖN: Si al principio hubiésemos tomado el menor de las x y las z, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$, entonces parametrizamos haciendo $y = \lambda$, nos queda el sistema $\begin{cases} 2x+z=\lambda \\ 3x+2z=1-\lambda \end{cases}$ y éste lo resolvemos por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1-\lambda & 2\end{vmatrix}}{1}=2\lambda-1+\lambda \rightarrow x=-1+3\lambda$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2 & \lambda\\ 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}}{1}=2-2\lambda-3\lambda \rightarrow z=2-5\lambda$$

Y por tanto la recta r es: $r\equiv\begin{cases}x=-1+3\lambda\\ y=\lambda\\ z=2-5\lambda\end{cases}$ con $\lambda\in R$ que es una expresión más cómoda que las dos anteriores al no tener fracciones. El punto por donde pasa es $Q(1,0,2)$ y vector director $\vec{w}=(3,1,-5)=-\vec{u}$

b)

Para obtener puntos de una recta basta con darle valores al parámetro en las paramétricas. Vamos a usar la ecuación

$$r\equiv\begin{cases}x=\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\lambda\\ y=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\lambda\\ z=\lambda\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\lambda=0\Rightarrow x=\frac{1}{5};y=\frac{2}{5};z=0\Rightarrow P_1\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5},0\right)\\ \lambda=5\Rightarrow x=\frac{-14}{5};y=\frac{-3}{5};z=5\Rightarrow P_2\left(\frac{-14}{5},\frac{-3}{5},5\right)\\ \lambda=7\Rightarrow x=-4;y=-1;z=7\Rightarrow P_3(-4,-1,7)\end{cases}$$

<u>ECUACIONES DE LOS EJES COORDENADOS</u> (muy importante)

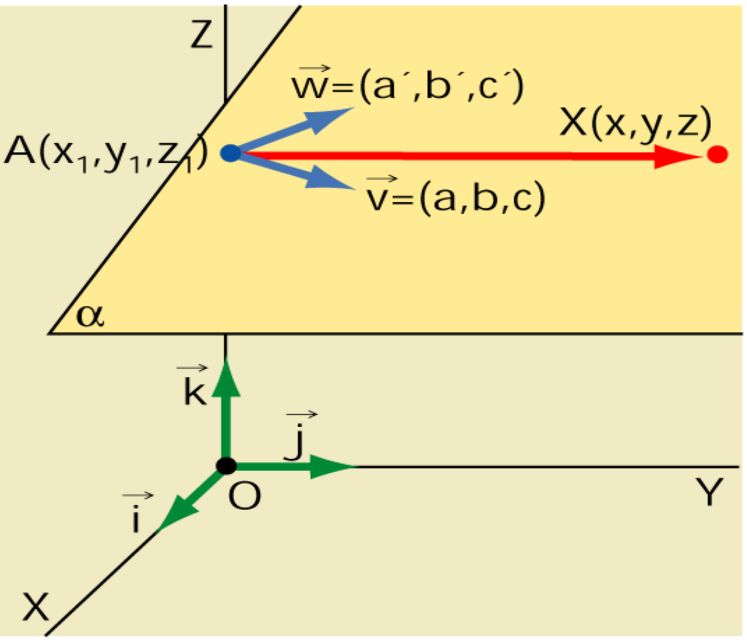
Os dejo una tabla con los datos y ecuaciones. Las continuas no se suelen usar pues tenemos el 0 en el denominador. Es más, en el espacio se usan las paramétricas y las implícitas primordialmente para todas las rectas.

EJE	**Punto**	**Vector director**	**Ecuaciones paramétricas**	**Ecuación continua**	**Ecuaciones implícitas**
OX	O(0,0,0)	$\vec{i}=(1,0,0)$	$OX\equiv\begin{cases}x=\lambda\\ y=0\\ z=0\end{cases}$	$OX\equiv\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}$	$OX\equiv\begin{cases}y=0\\ z=0\end{cases}$
OY	O(0,0,0)	$\vec{j}=(0,1,0)$	$OY\equiv\begin{cases}x=0\\ y=\lambda\\ z=0\end{cases}$	$OY\equiv\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$	$OY\equiv\begin{cases}x=0\\ z=0\end{cases}$
OZ	O(0,0,0)	$\vec{k}=(0,0,1)$	$OZ\equiv\begin{cases}x=0\\ y=0\\ z=\lambda\end{cases}$	$OZ\equiv\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$	$OZ\equiv\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$

5. ECUACIONES DEL PLANO

Un plano en el espacio viene dado por un punto por donde pasa, $A(x_1, y_1, z_1)$, y dos vectores directores, $\vec{v} = (a,b,c)$ y $\vec{w} = (a',b',c')$,que han de ser linealmente independientes, pues sino sería una recta.

La **ecuación vectorial** del plano α es: $\alpha \equiv \vec{OX} = \vec{OA} + \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}$ con $\lambda, \mu \in R$ y de ella obtenemos las paramétricas, simplemente usando las coordenadas e igualando: $(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \lambda(a,b,c) + \mu(a',b',c')$



ECUACIONES PARAMÉTRICAS

$$\alpha \equiv \begin{cases} x = x_1 + \lambda \cdot a + \mu \cdot a' \\ y = y_1 + \lambda \cdot b + \mu \cdot b' \\ z = z_1 + \lambda \cdot c + \mu \cdot c' \end{cases} \text{ con } \lambda, \mu \in R$$

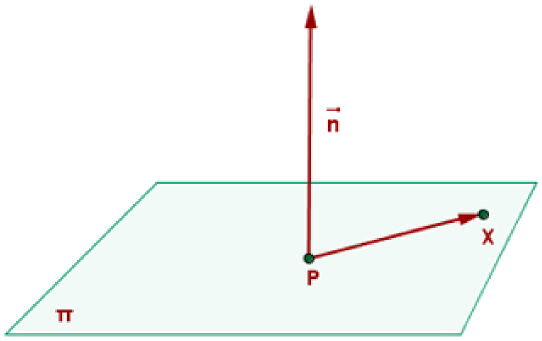
ECUACIÓN IMPLÍCITA

De las ecuación vectorial o de las paramétricas se observa que el vector $\vec{AX} = \vec{OX} - \vec{OA} = (x - x_y, y - y_1, z - z_1)$ $= \lambda(a,b,c) + \mu(a',b',c')$, es decir, $\vec{AX}$ es linealmente dependiente respecto de los vectores $\vec{v} = (a,b,c)$ y $\vec{w} = (a',b',c')$ → rango $\left(\vec{AX}, \vec{v}, \vec{w}\right) = 2$ → $\alpha \equiv \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0$ Realizando este determinante nos queda al final una ecuación del tipo: $\alpha \equiv A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ que es la ecuación implícita del plano α

NOTA: Normalmente los planos se designan por las letra griegas α, β, π

Un *plano también puede venir determinado por 3 puntos no alineados* por donde pase: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ y $C(x_3, y_3, z_3)$. En este caso tomamos podemos obtener los vectores directores a partir de los puntos, por ejemplo $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$, y considerar cualquiera de los puntos. Análogamente a las rectas podemos tomar vectores proporcionales que nos hagan más fácil las operaciones.

De la ecuación implícita de un plano $\pi \equiv A{\cdot}x + B{\cdot}y + C{\cdot}z + D = 0$, se obtiene un vector ortogonal (perpendicular) al plano que se llama *__vector normal__* y es $\vec{n} = (A, B, C)$



Con esto, un plano también queda unívocamente determinado por un punto por donde pase, $A(x_1, y_1, z_1)$, y un vector normal a él, $\vec{n} = (A, B, C)$

__Ejemplo__: Hallar las ecuaciones paramétricas e implícita, así como un vector normal del plano π que pasa por los puntos $A(1,2,-2)$, $B(0,1,-1)$ y $C(2,0,0)$.

Consideremos como vectores directores $\vec{BC} = (2,-1,1)$ y $\vec{BA} = (1,1,-1)$ y como punto tomamos $C(2,0,0)$.

__Ecuaciones paramétricas__:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda + \mu \\ y = 0 - \lambda + \mu \\ z = 0 + \lambda - \mu \end{cases} \quad \text{con } \lambda, \mu \in R$$

__Ecuación implícita__:

La obtenemos de

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z-0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x - 2 + y + 2z + z - x + 2 + 2y = 0 \rightarrow \pi \equiv 3y + 3z = 0 \rightarrow$$

(podemos simplificar y nos queda) $\boxed{\pi \equiv y + z = 0}$

El vector normal es $\vec{n} = (0,1,1)$

__Ejemplo__: Obtener las ecuaciones paramétricas e implícita del plano que pasa por $P(2,1,-3)$ y tiene por vector normal $\vec{n} = (-4,6,2)$

Primero vamos a considerar como vector normal $\vec{w} = \dfrac{1}{2}\vec{n} = (-2,3,1)$, pues lo que nos interesa es la dirección, y así los cálculos serán más cómodos.

La ecuación implícita del plano será de la forma: $\pi \equiv -2x + 3y + z + D = 0$. Como $P \in \pi$ ha de verificar la ecuación del plano y de ahí calculamos D $\rightarrow$ $-2{\cdot}2 + 3{\cdot}1 + (-3) + D = 0 \rightarrow D = 4$

__Ecuación implícita__: $\pi \equiv -2x + 3y + z + 4 = 0$

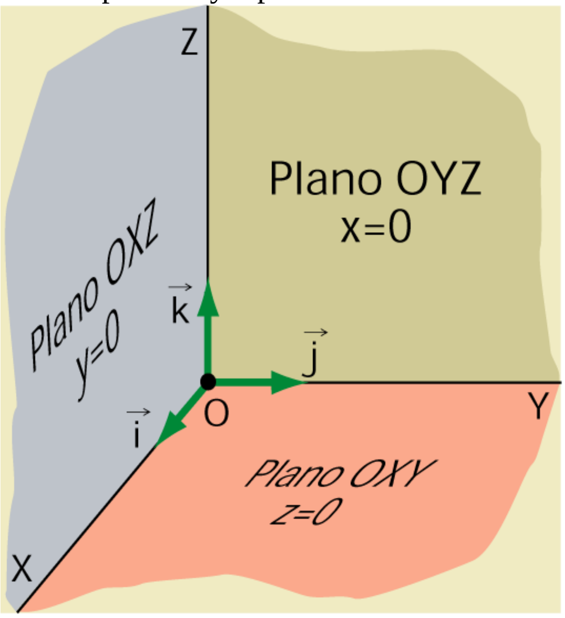
__Ecuaciones paramétricas__: De manera similar a las recta, resolvemos de forma algebraica el sistema $\{-2x + 3y + z + 4 = 0$, que obviamente es compatible indeterminado. Como es una sola ecuación y tres incógnitas, hemos de parametrizar dos de ellas. Lo más cómodo es hacer $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \end{cases}$ y despejamos z en la ecuación: $-2\lambda + 3\mu + z + 4 = 0 \rightarrow z = -4 + 2\lambda - 3\mu$. Por tanto:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -4 + 2\lambda - 3\mu \end{cases}$$ con $\lambda, \mu \in R$ son las ecuaciones paramétricas del plano.

Además ya tenemos otro punto por donde pasa $A(0,0,-4)$ y vectores directores $\vec{u} = (1,0,2)$ y $\vec{v} = (0,1,-3)$

PLANOS COORDENADOS

En el espacio hay 3 planos coordenados como podemos ver en la figura:



Aquí están sus características y os dejo a vosotros la obtención de las ecuaciones que se dan:

Plano	**Punto**	**Vectores directores**	**Vector normal**	**Ecuaciones paramétricas**	**Ecuación implícita**
OXY	O(0,0,0)	$\vec{i} = (1,0,0)$ $\vec{j} = (0,1,0)$	$\vec{k} = (0,0,1)$	$OXY \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases}$	$OXY \equiv z = 0$
OXZ	O(0,0,0)	$\vec{i} = (1,0,0)$ $\vec{k} = (0,0,1)$	$\vec{j} = (0,1,0)$	$OXZ \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \mu \end{cases}$	$OXZ \equiv y = 0$
OYZ	O(0,0,0)	$\vec{j} = (0,1,0)$ $\vec{k} = (0,0,1)$	$\vec{i} = (1,0,0)$	$OYZ \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$	$OYZ \equiv x = 0$

6. POSICIONES RELATIVAS DE DOS Y TRES PLANOS

a: *Posiciones relativas de dos planos*

Consideremos dos planos $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ y $\pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$. Estudiar su posición relativa se reduce a estudiar el sistema de ecuaciones asociado:

$\begin{cases} Ax+By+Cz=-D \\ A'x+B'y+C'z=-D' \end{cases}$ Donde tenemos la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^*=\begin{pmatrix} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \end{pmatrix}$ Las posibilidades son las siguientes:

1) rango(A) = rango(A*) = 1 → se trata de un sistema compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones, las dos ecuaciones son proporcionales → los planos π y π' son coincidentes

Planos coincidentes
Son el mismo plano

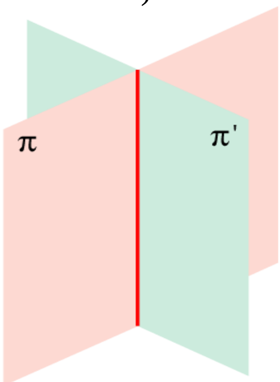
Ejemplo: Los planos $\pi\equiv 2x+3y-z+2=0$ y $\pi'\equiv -4x-6y+2z-4=0$, tenemos el sistema asociado $\begin{cases} 2x+3y-2z=-2 \\ -4x-6y+2z=4 \end{cases}$, y es fácil ver que $E_2=-2\cdot E_1$ (por tanto, rango(A) = rango(A*) = 1), es decir, los dos planos son el mismo o coincidentes.

2) rango(A) = 1 y rango(A*) = 2 → se trata de un sistema incompatible → los planos π y π' son paralelos

Planos paralelos
No tienen puntos comunes

Ejemplo: Los planos $\pi\equiv 2x+3y-z+2=0$ y $\pi'\equiv -4x-6y+2z+9=0$, tenemos el sistema asociado $\begin{cases} 2x+3y-2z=-2 \\ -4x-6y+2z=-9 \end{cases}$, y es fácil ver que rango(A) = 1 y rango(A*) = 2, es decir, los dos planos son paralelos.

3) rango(A) = rango(A*) = 2→ se trata de un sistema compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones pero las dos ecuaciones no son proporcionales → los planos π y π' son secantes (se cortan en una recta)



Planos secantes
Tienen una recta común

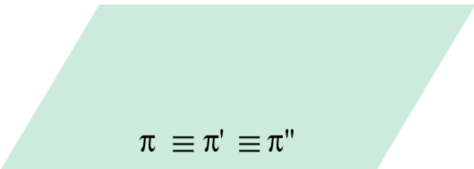
Ejemplo: Los planos $\pi \equiv 2x+3y-z+2=0$ y $\pi' \equiv -x+3y+z+1=0$, tenemos el sistema asociado $\begin{cases} 2x+3y-2z=-2 \\ -x+3y+z=-1 \end{cases}$, y es fácil ver que rango(A) = rango(A*) = 2, es decir, los dos planos son secantes, se cortan en una recta..

b: *Posiciones relativas de tres planos*

Consideremos tres planos $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$, $\pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$ y $\pi'' \equiv A''x+B''y+C''z+D''=0$. Estudiar su posición relativa se reduce a estudiar el sistema de ecuaciones asociado:

$\begin{cases} Ax+By+Cz=-D \\ A'x+B'y+C'z=-D' \\ A''x+B''y+C''z=-D'' \end{cases}$ Donde tenemos la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^*=\begin{pmatrix} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \end{pmatrix}$ Las posibilidades son las siguientes:

1) rango(A) = rango(A*) = 1 → sistema compatible indeterminado, las tres ecuaciones son proporcionales → los planos π, π' y π'' son coincidentes



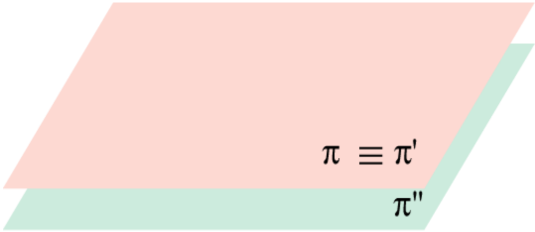
Ejemplo: Los planos $\pi \equiv 2x+3y-z+2=0$, $\pi' \equiv -4x-6y+2z-4=0$ y $\pi'' \equiv -2x-3y+z-2=0$ tenemos el sistema asociado $\begin{cases} 2x+3y-z=-2 \\ -4x-6y+2z=4 \\ -2x-3y+z=2 \end{cases}$, y es fácil ver que rango(A) = rango(A*) = 1, pues las 3 ecuaciones son proporcionales. Los 3 planos son coincidentes

2) rango(A) =1 y rango(A*) = 2 → se trata de un sistema incompatible donde:

-o bien, los tres planos son paralelos y distintos dos a dos

Ejemplo: Los planos $\pi \equiv 2x+3y-z+2=0$, $\pi' \equiv -4x-6y+2z-7=0$ y $\pi'' \equiv -2x-3y+z+1=0$ tenemos el sistema asociado $\begin{cases} 2x+3y-z=-2 \\ -4x-6y+2z=7 \\ -2x-3y+z=-1 \end{cases}$, y es fácil ver que rango(A) = 1 y rango(A*) = 2. Los 3 planos son paralelos y distintos dos a dos.

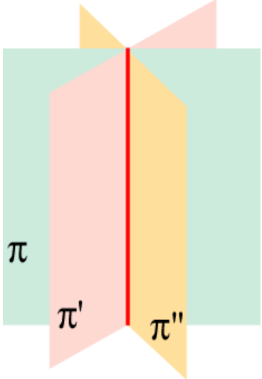
-o bien, hay dos planos coincidentes y el otro paralelo y distinto



Ejemplo: Los planos $\pi \equiv 2x+3y-z+2=0$, $\pi' \equiv -4x-6y+2z-4=0$ y $\pi'' \equiv -2x-3y+z+1=0$ tenemos el sistema asociado $\begin{cases} 2x+3y-z=-2 \\ -4x-6y+2z=4 \\ -2x-3y+z=-1 \end{cases}$, y es fácil ver que rango(A) = 1 y rango(A*) = 2. Además se ve que $E_2 = -2 \cdot E_1$, luego los planos π y π' son coincidentes y paralelos a π''

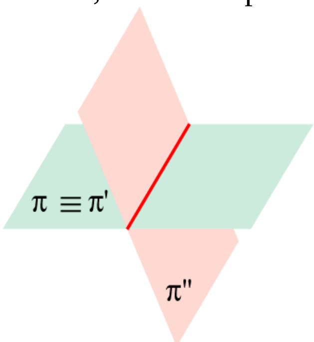
3) rango(A) = rango(A*) = 2 → se trata de un sistema compatible indeterminado, los tres planos se cortan en una recta, pues una de las ecuaciones depende linealmente de las otras dos. Puede ocurrir:

-o bien, los tres planos son distintos y secantes en una recta



Ejemplo: Los planos $\pi \equiv 2x+3y-z+2=0$, $\pi' \equiv x+y=0$ y $\pi'' \equiv 3x+4y-z+2=0$ tenemos el sistema asociado $\begin{cases} 2x+3y-z=-2 \\ x+y=0 \\ 3x+4y-z=-2 \end{cases}$, y es fácil ver que rango(A) = rango(A*) = 2. Además se ve que $E_3 = E_1 + E_2$, luego los planos son distintos y se cortan en una recta

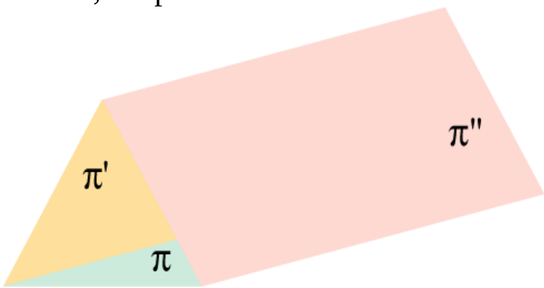
-o bien, dos de los planos son coincidentes y el otro los corta en una recta



Ejemplo: Los planos $\pi \equiv 2x+3y-z+2=0$, $\pi' \equiv x+y=0$ y $\pi'' \equiv 4x+6y-2z+4=0$ tenemos el sistema asociado $\begin{cases} 2x+3y-z=-2 \\ x+y=0 \\ 4x+6y-2z=-4 \end{cases}$, y es fácil ver que rango(A) = rango(A*) = 2. Además se ve que $E_3 = 2 \cdot E_1$, luego los planos π y π'' son coincidentes y secantes en una recta con π'

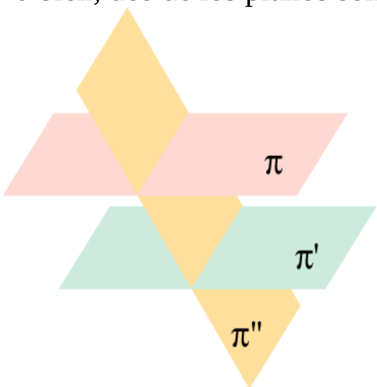
4) rango(A) = 2 y rango(A*) = 3 → el sistema es incompatible y puede ocurrir que:

-o bien, los planos se cortan dos a dos formando un prisma



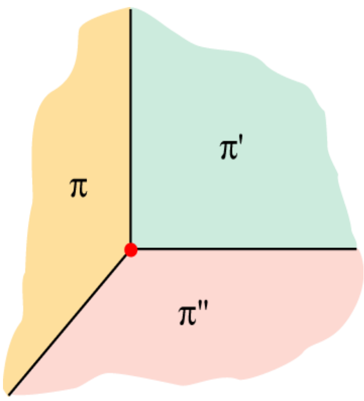
Ejemplo: Los planos $\pi \equiv x+y-z+2=0$, $\pi' \equiv x+y=0$ y $\pi'' \equiv 2x+2y-z=0$ tenemos el sistema asociado $\begin{cases} x+y-z=-2 \\ x+y=0 \\ 2x+2y-z=0 \end{cases}$, y es fácil ver que rango(A) = 2 y rango(A*) = 3. Además se ve que no hay planos paralelos, luego los planos se cortan dos a dos formando un prisma

-o bien, dos de los planos son paralelos y el otro es secante con ellos



Ejemplo: Los planos $\pi \equiv 2x+3y-z+2=0$, $\pi' \equiv x+y=0$ y $\pi'' \equiv 2x+3y-z=0$ tenemos el sistema asociado $\begin{cases} 2x+3y-z=-2 \\ x+y=0 \\ 2x+3y-z=0 \end{cases}$, y es fácil ver que rango(A) = 2 y rango(A*) = 3. Además se ve que E_1 y E_3 son incompatibles, luego los planos π y π'' son paralelos y secantes en una recta con π'

5) rango(A) = rango(A*) = 3 → el sistema es compatible determinado, los tres planos se cortan en un punto



Ejemplo: Los planos $\pi \equiv 2x+3y-z+2=0$, $\pi' \equiv x+y=0$ y $\pi'' \equiv z+4=0$ tenemos el sistema asociado $\begin{cases} 2x+3y-z=-2 \\ x+y=0 \\ z=-4 \end{cases}$, y es fácil ver que rango(A) = rango(A*) = 3. Los tres planos son secantes en un punto.

7. POSICIONES RELATIVAS DE UNA RECTA Y UN PLANO

Consideremos un plano $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ y la recta en ecuaciones implícitas $r \equiv \begin{cases} A'x+B'y+C'z+D'=0 \\ A''x+B''y+C''z+D''=0 \end{cases}$ Lo primero es darse cuenta que las ecuaciones implícitas de una recta no es otra cosa que las ecuaciones implícitas de dos planos, que por supuesto no han de ser ni paralelos ni coincidentes, es decir, rango$\begin{pmatrix} A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$ = rango$\begin{pmatrix} A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \end{pmatrix}$ = 2

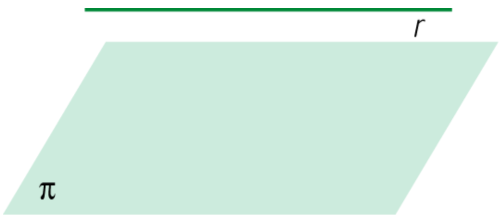
El sistema asociado al plano π y a la recta r es: $\begin{cases} Ax+By+Cz=-D \\ A'x+B'y+C'z=-D' \\ A''x+B''y+C''z=-D'' \end{cases}$ Donde tenemos la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^*=\begin{pmatrix} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \end{pmatrix}$ que por lo menos tienen rango 2. Las posibilidades son las siguientes:

1) rango(A) = rango(A*) = 2 → es un sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones) → la recta está contenida en el plano

Ejemplo: Dado el plano $\pi \equiv -x+y+2z=-1$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-z=1 \end{cases}$ Estudiar su posición relativa

Tenemos que rango$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ = 2 pues su determinante vale 0 (también se puede observar que $F_3=-F_1+F_2$). Además rango$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ = 2 por lo mismo de antes→ es un sistema compatible indeterminado (hay infinitas soluciones) → la recta está contenida en el plano

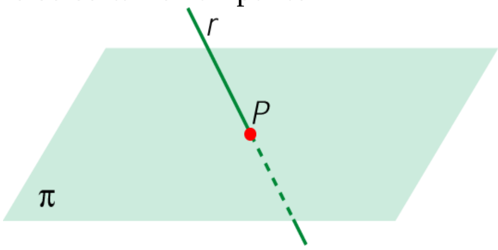
2) rango(A) = 2 y rango(A*) = 3→ es un sistema incompatible → la recta y el plano son paralelos



Ejemplo: Dado el plano $\pi \equiv -x+y+2z=0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-z=1 \end{cases}$ Estudiar su posición relativa

Tenemos que rango$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ = 2 pues su determinante vale 0 (también se puede observar que $F_3 = -F_1 + F_2$). Además rango$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ = 3 pues el menor de orden 3 $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ → es un sistema incompatible → la recta y el plano son paralelos

3) rango(A) = rango(A*) = 3 → es un sistema compatible determinado (solución única) → la recta y el plano se cortan en un punto



Ejemplo: Dado el plano $\pi \equiv -x+2z=0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-z=1 \end{cases}$ Estudiar su posición relativa

Tenemos que rango$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ = 3 pues su determinante vale -3. Además rango$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ = 3 pues la matriz de coeficientes es una submatriz y tiene rango 3→ es un sistema compatible determinado→ la recta y el plano son secantes (se cortan en un punto

8. POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

Vamos a considerar dos rectas dadas en forma paramétrica:

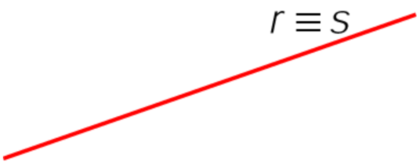
$r \equiv \begin{cases} x = x_0 + t\cdot v_1 \\ y = y_0 + t\cdot v_2 \\ z = z_0 + t\cdot v_3 \end{cases}$ con $t \in R$ → tenemos un punto de r $A_r(x_0, y_0, z_0)$ y un vector director $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$s \equiv \begin{cases} x = x_1 + t\cdot w_1 \\ y = y_1 + t\cdot w_2 \\ z = z_1 + t\cdot w_3 \end{cases}$ con $t \in R$ → tenemos un punto de s $A_s(x_1, y_1, z_1)$ y un vector director $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$

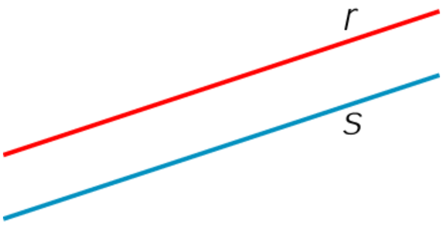
Tenemos otro vector a partir de los dos puntos $\overrightarrow{A_r A_s} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$. Estudiemos la dependencia de estos tres vectores $\overrightarrow{A_r A_s} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ que nos darán la información relevante de la posición relativa de las dos rectas:

1) Si rango$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$ = 1 → $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son proporcionales → r y s tienen la misma dirección (o son iguales o paralelas)

a: Si $\overrightarrow{A_r A_s} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ es proporcional a cualquiera de los dos vectores, es decir, rango$\left(\overrightarrow{A_r A_s}, \vec{v}, \vec{w}\right)$= 1, entonces las dos rectas son coincidentes.

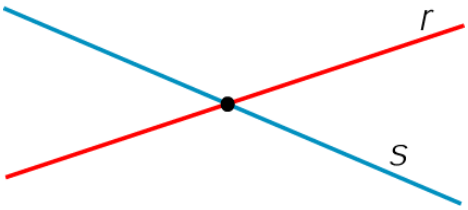


b: Si $\overrightarrow{A_r A_s} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ no es proporcional a cualquiera de los dos vectores, es decir, rango$\left(\overrightarrow{A_r A_s}, \vec{v}, \vec{w}\right)$= 2, entonces las dos rectas son paralelas.

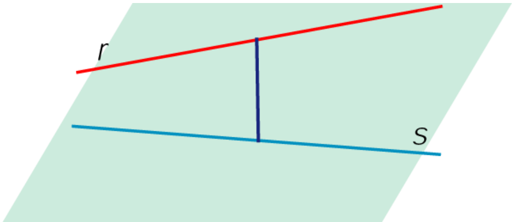


2) Si rango$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$ = 2 → $\vec{v}$ y $\vec{w}$ no son proporcionales → r y s no tienen la misma dirección (o se cruzan o se cortan)

a: Si $\overrightarrow{A_r A_s} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ es linealmente dependiente respecto de $\vec{v}$ y $\vec{w}$, es decir, rango$\left(\overrightarrow{A_r A_s}, \vec{v}, \vec{w}\right)$= 2, entonces las dos rectas son secantes.



b: Si $\overrightarrow{A_r A_s} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ es linealmente independiente respecto de $\vec{v}$ y $\vec{w}$, es decir, rango$\left(\overrightarrow{A_r A_s}, \vec{v}, \vec{w}\right)$= 3, entonces las dos rectas se cruzan.



<u>Ejemplo</u>: Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ Estudiar su posición relativa y si son secantes calcular su punto de corte.

De la recta r tenemos un punto y un vector director: $A_r(0,1,2)$ y $\vec{v} = (1,-1,1)$

La recta s la pasamos a paramétricas haciendo $z = \lambda$ (nótese que $y = \lambda$ no se puede hacer) y calculamos:

$s\equiv\begin{cases}x=-2-\lambda\\ y=2\\ z=\lambda\end{cases}$. Con lo cual tenemos su punto y su vector director: $A_s(-2,2,0)$ y $\vec{w}=(-1,0,1)$

Tenemos que: rango$\left(\vec{v},\vec{w}\right)$ = rango$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ = 2. Por tanto las rectas o son secantes o se cruzan.

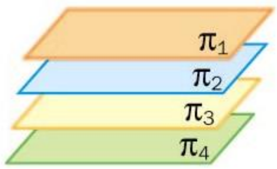
Calculamos el vector $\vec{A_rA_s}=(-2,1,-2)$ y el rango$\left(\vec{A_rA_s},\vec{v},\vec{w}\right)$ con el menor $\begin{vmatrix}-2 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0$. Por tanto,

rango$\left(\vec{A_rA_s},\vec{v},\vec{w}\right)$ = 3. Las recta r y s se cruzan

9. HACES DE PLANOS

A: Haces de planos paralelos

Dado un plano $\pi\equiv Ax+By+Cz+D=0$, se llama haz de planos paralelos a π a todos aquellos que son paralelos a él, es decir, son de la forma $Ax+By+Cz+\lambda=0$



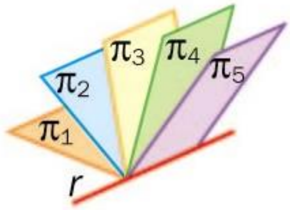
El haz de planos se representa por: $H\equiv\{\pi_\lambda\equiv Ax+By+Cz+\lambda=0 \ \text{ con } \ \lambda\in R\}$

Ejemplo: Dado el plano $\alpha\equiv 2x-y+3z-5=0$, determina su haz de planos paralelos y halla el plano de este haz que pasa por el punto P(4,1,2).

El haz de planos paralelos es: $H\equiv\{\alpha_\lambda\equiv 2x-y+3z+\lambda=0 \ \text{ con } \ \lambda\in R\}$
De todos estos planos, el que pase por P, tiene que cumplir la ecuación y así calculamos λ:
$2\cdot 4-1+3\cdot 2+\lambda=0 \rightarrow \lambda=-13 \rightarrow$ el plano pedido es: $\beta\equiv 2x-y+3z-13=0$

B: Haces de planos secantes

Consideremos dos planos $\pi\equiv Ax+By+Cz+D=0$ y $\pi'\equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$ que sean secantes en una recta. Se llama haz de planos secantes a todos los planos que contienen a esa recta



El haz de planos secantes es:
$H\equiv\{\pi_\lambda\equiv(Ax+By+Cz+D)+\lambda\cdot(A'x+B'y+C'z+D')=0 \ \text{con}\ \lambda\in R\}\ \cup$
$\{\pi'\equiv A'x+B'y+C'z+D'=0\}$ pues el plano π' no se puede obtener para ningún valor de λ

Ejemplo: Dados los planos $\pi \equiv x+y+z=0$ y $\pi' \equiv 2x-y=1$. Dar la ecuación del haz de planos secantes formado por esos dos planos y encontrar el que pasa por el origen de coordenadas

Es fácil ver que los dos planos son secantes en una recta, por tanto se puede calcular el haz de planos secantes $H \equiv \{\pi_\lambda \equiv (x+y+z)+\lambda\cdot(2x-y-1)=0 \text{ con } \lambda \in R\} \cup \{\pi' \equiv 2x-y-1=0\}$

Imponemos que pase por el origen para calcular λ: (0+0+0) + λ(2·0-0-1)=0→ λ = 0 El plano pedido es $\pi \equiv x+y+z=0$