UNIDAD 1.- Funciones reales. Límites y continuidad

1. FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

Una función real de variable real es una aplicación de un subconjunto de los nº reales (R) en otro subconjunto de R

Se representa de la siguiente forma: $\begin{matrix} f : D \subseteq R \to R \\ x \in D \to y = f(x) \end{matrix}$ Una "x" tiene una sola imagen, pero una "y" puede tener varias x que vayan a ella.

Al conjunto D se le llama dominio de definición (o simplemente dominio) de la función $y = f(x)$, y suele ser el mayor subconjunto de R donde la función f tiene sentido. Se representa por Dom(f)

A "x" se le llama variable independiente, y representa a los valores a los que se aplica f

A "y" se le llama variable dependiente, y representa a los valores que se obtienen de aplicar f

Al conjunto de todos los valores que se obtienen aplicando f a todos los valores del dominio se le llama conjunto imagen o recorrido. Se representa por Im(f) o por Recorr (f)

Se denomina gráfica o grafo de una función $y = f(x)$ al conjunto de puntos del plano de la forma $(x, f(x))$ con $x \in$ Dom(f)

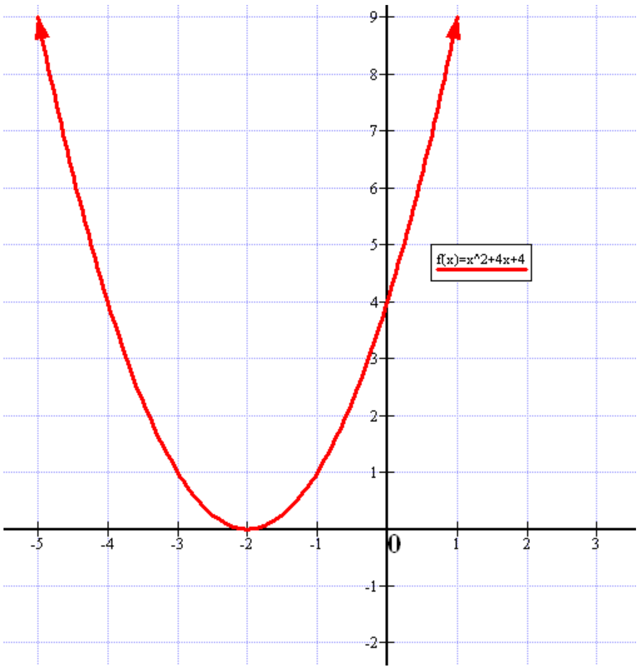
Ejemplo 1: Sea la función polinómica cuadrática siguiente: $\begin{matrix} f : D \subseteq R \to R \\ x \in D \to y = f(x) = x^2 + 4x + 4 \end{matrix}$

De forma reducida nos darán de manera habitual la función sólo mediante su criterio o fórmula. En este caso como: $f(x) = x^2 + 4x + 4$ ó $y = x^2 + 4x + 4$

Todas las funciones polinómicas tiene por dominio todos los nº reales, salvo que explícitamente nos hagan una restricción, que no es el caso.

Así, Dom(f) = R

El conjunto imagen o recorrido es más difícil de calcular, pues nos hace falta dibujar la función, obteniendo su gráfica, que en este caso es una parábola (y suponemos que el alumno sabe representarla con el vértice, concavidad, puntos de corte con los ejes y tabla de valores). Os saldrá un dibujo como el de la izquierda.



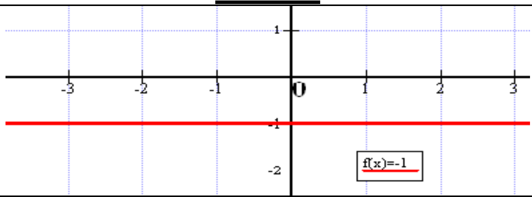
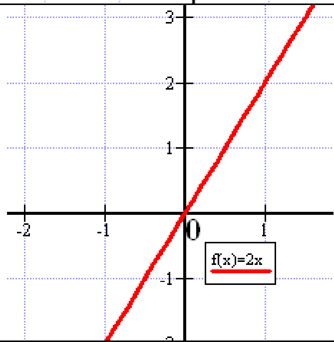
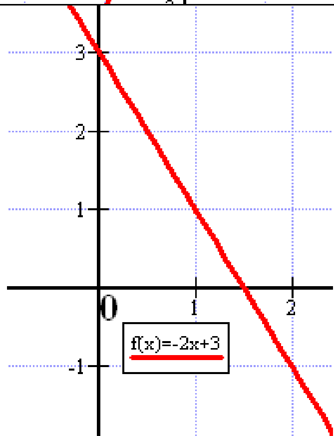
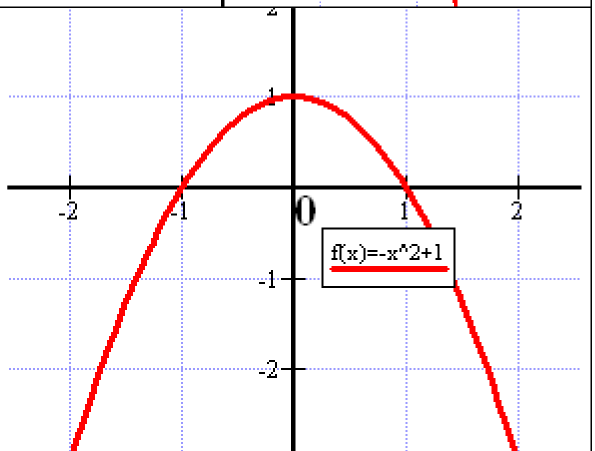
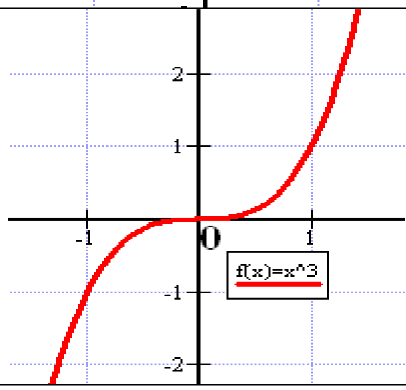
La imagen la miramos en el eje de ordenadas o eje OY (como si comprimiésemos el dibujo de la función sobre el eje OY) y obtenemos: Im(f) = $[0, +\infty)$

2. FUNCIONES MÁS USUALES

a) Funciones polinómicas

Su criterio o fórmula es un polinomio. Su dominio es todo R

Pueden ser:

Tipo	**Ejemplo**	**Gráfica**
Constantes $f(x)=k$ Su gráfica es una recta horizontal	$y=-1$ Dom(y) = R Im(y) = {-1}	
Lineales $f(x)=mx$ Su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas	$f(x)=2x$ Dom(f) = R Im(f) = R	
Afines $f(x)=mx+n$ Su gráfica es una recta inclinada	$f(x)=-2x+3$ Dom(f) = R Im(f) = R	
Cuadráticas $f(x)=ax^2+bx+c$ Su gráfica es una parábola	$y=-x^2+1$ Dom(f) = R Im(f) = $(-\infty,1]$	
Cúbicas $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ Para dibujarla necesitamos más conocimientos de los actuales	Una de las más usadas es $y=x^3$ Dom(y) = R Im(y) = R	
Todas las demás de grado superior a 3	$f(x)=x^4-x^2$ Dom(f) = R	Sus gráficas serán estudiadas más adelante

.

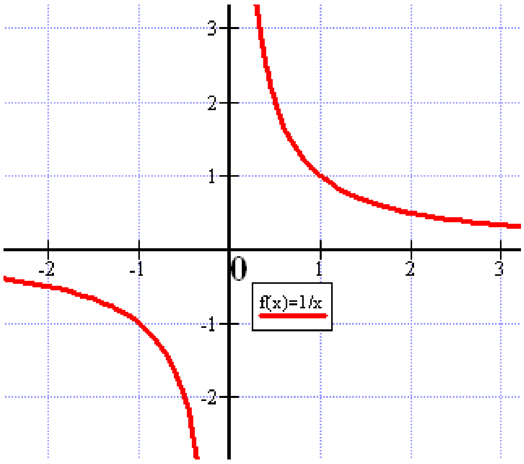
b) *Funciones racionales fraccionarias*

Son de la forma $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Su dominio son todos aquellos nº reales que no anulan el denominador, Matemáticamente lo expresamos de la siguiente manera: $Dom(y) = \{x \in R \,/\, \mathrm{Q(x)} \neq 0\}$ (esto se lee así, "todos los nº reales tales que el polinomio denominador $Q(x)$ no vale 0"

Sus gráficas las estudiaremos más adelante, pero algunas ya las conocemos, y las vemos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2: $y = \frac{1}{x}$, que es una hipérbola equilátera. Tenemos que Dom(y) = R\{0}



y por la gráfica podemos sacar su imagen Im(y) = R\{0}

Ejemplo 3.- $f(x) = \frac{x-5}{x^2 - 3x}$ Vamos a calcular su dominio, $Dom(f) = \{x \in R \setminus x^2 - 3x \neq 0\}$

Vemos dónde se anula el denominador: $x^2 - 3x = 0 \rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ x = 3 \end{matrix}$ Por tanto, $Dom(f) =$ R\{0, 3}

La gráfica la estudiaremos más adelante

c) *Funciones irracionales del tipo* $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$

- Si el índice del radical es impar (n es impar), entonces el dominio de la función f coincide con el dominio de la función g
- Si el índice del radical es par (n es par), entonces el dominio será el conjunto de los nº reales tales que $g(x) \geq 0$

Veamos ejemplos de lo dicho:

Ejemplo 4.- Calcular el dominio de $y = \sqrt[3]{2x-1}$. Como se trata de una función irracional de índice impar (3), nos fijamos en el radicando, y como se trata de una polinómica de primer grado (afín) su dominio será R
Dom (y) = R

Ejemplo 5.- Calcular el dominio de $f(x) = \sqrt[5]{\frac{2}{x^2 - 9}}$ Por ser de índice impar (5), nos fijamos en el radicando, que es una fracción algebraica. Debemos descartar para el dominio los valores que anulan el denominador

$x^2-9=0 \rightarrow \begin{matrix} x=3 \\ x=-3 \end{matrix} \rightarrow Dom(f)=\mathrm{R}\backslash\{3,-3\}$

Ejemplo 6.- Calcular el dominio de $f(x)=\sqrt[4]{\frac{x-1}{x^2-9}}$ Por ser de índice par, vamos a hacer una tabla de signos para conocer donde el radicando es ≥ 0. Veamos primero donde el numerador y el denominador del radicando se anula.

$\begin{matrix} x-1=0 \\ x^2-9=0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x=1 \\ x=3 \\ x=-3 \end{matrix}$ Con estos tres valores dividimos la recta real en 4 intervalos abiertos y construimos la tabla de signos:

	$(-\infty,-3)$	(-3,1)	(1,3)	$(3,+\infty)$
x-1	-	-	+	+
x^2-9	+	-	-	+
	-	**+**	**-**	**+**

De donde deducimos que $Dom(f)=(-3,1]\cup(3,+\infty)$. Fijaos que el 1 es cerrado pues anula el numerador del radicando y tiene sentido, mientras que –3 y 3 van abiertos pues anulan el denominador y no tienen sentido (dividiríamos por 0)

d) Funciones trigonométricas

Las de tipo y = sen(g(x)) ó y = cos(g(x)) tienen por dominio el dominio de g(x)

Las de tipo y = tg(g(x)) tienen por dominio: $Dom(tg(g(x))=\{x\in R \mid g(x)\neq \frac{\pi}{2}+k\pi \text{ con } k\in \mathrm{Z}\}$

Ejemplo 7.- Calcular el dominio de $f(x)=sen\left(\sqrt{\frac{x-2}{x+3}}\right)$ Os dejo la solución y practicad vosotros

$Dom(f)=(-\infty,-3)\cup[2,+\infty)$

e) Funciones exponenciales

Las exponenciales $f(x)=a^{g(x)}$ tienen por dominio el mismo que el de la función exponente

Ejemplo 8.- $y=3^{\frac{2}{2x-1}} \rightarrow Dom(y)=R-\{\frac{1}{2}\}$

Ejemplo 9.- $f(x)=e^{\sqrt{x}}+2 \rightarrow Dom(f)=[0,+\infty)$

f) Funciones logarítmicas

El dominio de estas funciones, $f(x)=\log_a(g(x))$, son los nº reales tales que hacen $g(x)>0$

Ejemplo 10.- $f(x)=\ln(1-x^2)$ Matemáticamente tenemos que calcular $Dom(f)=\{x\in R \mid 1-x^2>0\}$

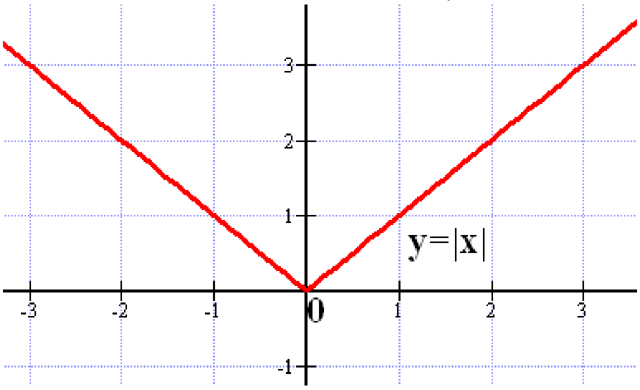
Resolvemos $1-x^2=0 \rightarrow \begin{matrix} x=1 \\ x=-1 \end{matrix}$ y ahora hacemos la tabla de signos

	$(-\infty,-1)$	(-1,1)	$(1,+\infty)$
$1-x^2$	**-**	**+**	**-**

Por tanto, $Dom(f) = (-1,1)$. Observad que 1 y -1 son abiertos pues ln0 no tiene sentido

g) Función valor absoluto, función parte entera y función parte decimal

Función valor absoluto: La función básica es $f(x) = |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$ Como vemos su dominio es R y su representación gráfica es



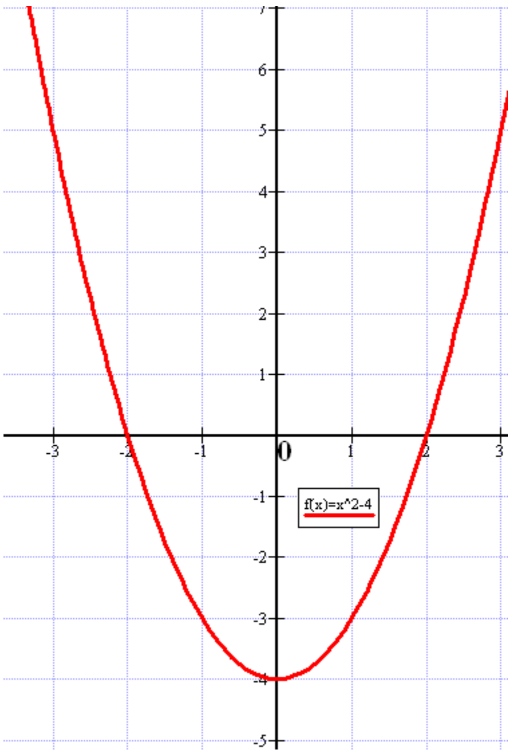
De aquí deducimos que $\mathrm{Re}\,corr(|x|) = [0,+\infty)$

Ejemplo 11.- Dada la función $f(x) = |x^2 - 4|$-3, vamos a calcular su dominio, su representación gráfica y su imagen.

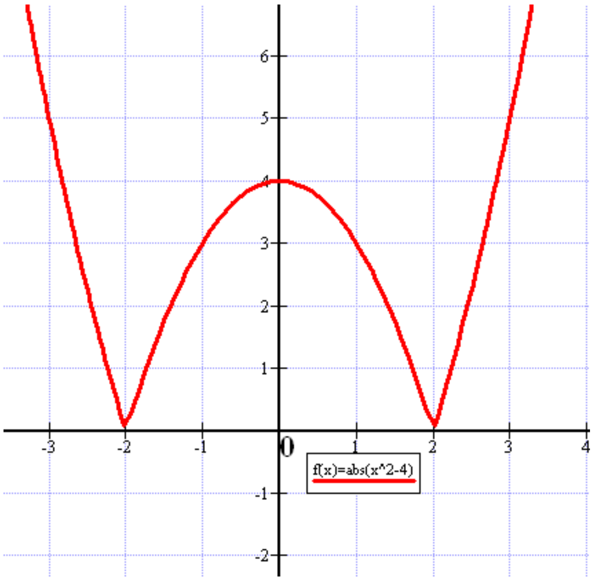
El dominio de $|g(x)|$ es igual al de $g(x)$, por lo que en nuestro caso como tenemos un polinomio cuadrático en el valor absoluto y después restamos 3, podemos concluir que $Dom(f) = R$.

Vamos a representarla gráficamente mediante 3 pasos:

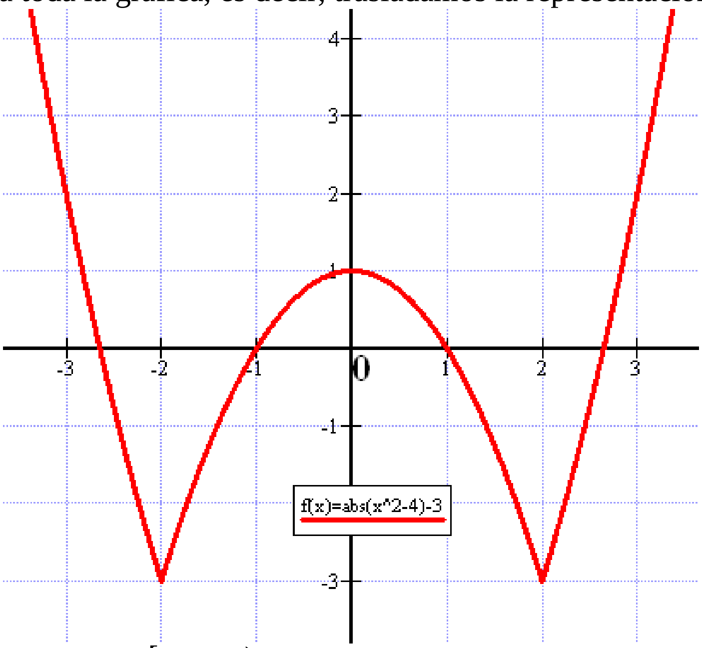
Paso1: Dibujamos la parábola $g(x) = x^2 - 4$, como sabemos desde hace muchooooo tiempo



Paso 2.- El valor absoluto lo que hace es poner positivo los valores de $x^2 - 1$ que son negativos y los demás los deja igual



Paso 3.- Restamos 3 a toda la gráfica, es decir, trasladamos la representación 3 unidades hacia abajo

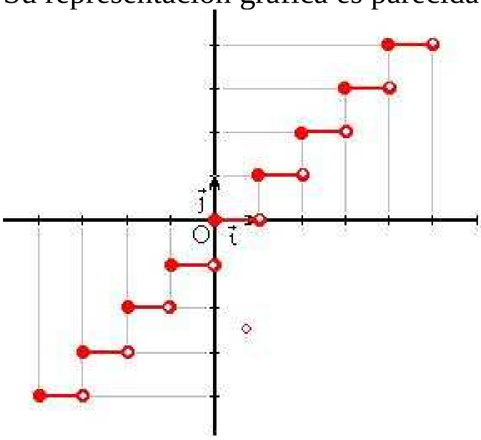


Ya podemos concluir que $\mathrm{Re}\,corr(f) = [-3,+\infty)$

Función parte entera: Es la función $f(x) = E(x) =$ mayor de todos los enteros menores o iguales a x. Su dominio es todo R

Así, unos ejemplos de valores, E(2’3) = 2, E(0’45) = 0, E(7) = 7, E(-1’3) = -2, E(-5,2) = -6, E(-8) = -8

Su representación gráfica es parecida a una escalera



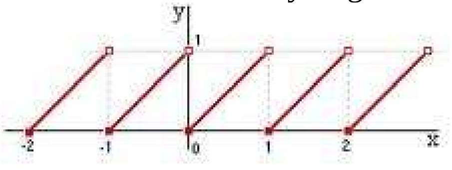
Y tenemos que Im(E(x)) = Z

Función parte decimal: Se define como Dec(x) = x - E(x).

Algunos ejemplos de valores:

x	2’1	8’234	5	-2	-12’34	-7’8	-9’7
Dec(x)	0’1	0’234	0	0	0’66	0’2	0’3

Su dominio es todo R y su gráfica es así:



Luego Im(Dec(x)) = [0, 1)

h) *Funciones definidas a trozos o por partes*

Estas funciones se caracterizan porque su criterio o fórmula varía según la variable independiente “x” pertenezca a un conjunto de valores o a otro. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 12.- Sea $f(x)=\begin{cases} -2x^2+x+3 & si \quad x<1 \\ 2x-1 & si \quad 1\le x<3 \\ \ln x & si \quad x>3 \end{cases}$ Vamos 1a estudiar su dominio, su representación gráfica y su imagen. Esta función también se podía poner así usando intervalos

$f(x)=\begin{cases} -2x^2+x+3 & si \quad x\in(-\infty,1) \\ 2x-1 & si \quad x\in[1,3) \\ \ln x & si \quad x\in(3+\infty) \end{cases}$ Podéis usar la que más os guste, es totalmente indiferente.

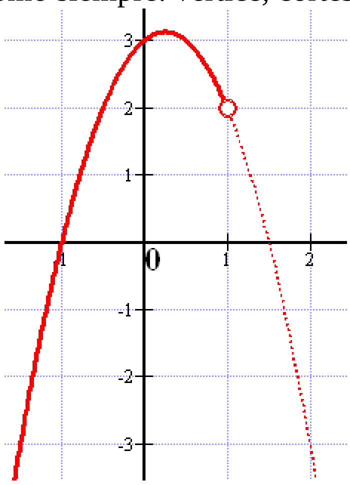
Como vemos tiene 3 partes:

- Si $x<1$ (o bien, $x\in(-\infty,1)$), está definida por un polinomio de grado 2, que siempre tiene sentido, en particular en la restricción $x<1$. Tendremos un trozo de parábola
- Si $1\le x<3$, está definida por un polinomio de grado 1 (función afín), que siempre tiene sentido, y su gráfica será una recta. Tendremos un trozo de recta (una semirrecta o un segmento)
- Si $x>3$, está definida por un logaritmo neperiano que tiene sentido siempre que su argumento (en este caso la “x”) sea positivo. Como x > 3, no hay problema y tiene sentido.

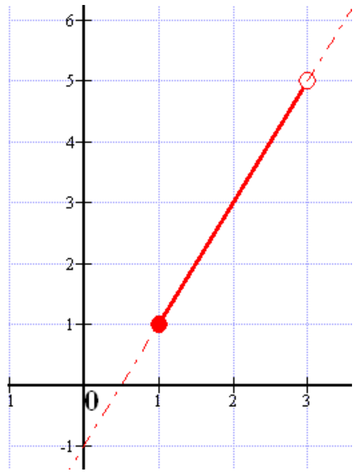
Pero hay un valor dónde la función no está definida, en x = 3. Por tanto, $Dom(f)=R-\{3\}$

Pasamos a representarla gráficamente, para ello dibujamos cada parte por separado y en línea discontinua se representa la parte que habrá que borrar en el gráfico final

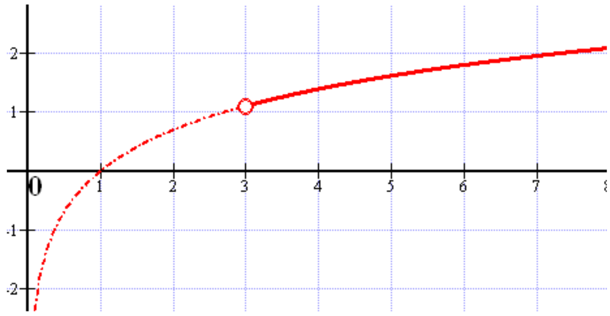
La parábola sería así (vosotros lo hacéis como siempre: vértice, cortes, etc.)



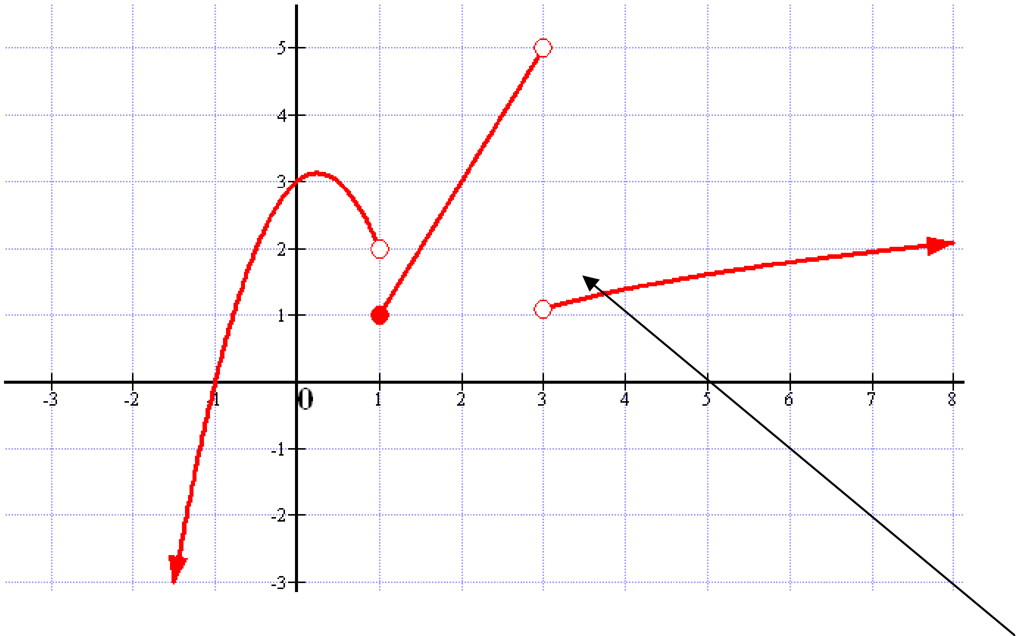
La recta



Y el logaritmo neperiano



Y todo unido y quitando las líneas punteadas, nos queda la gráfica de $f(x)$

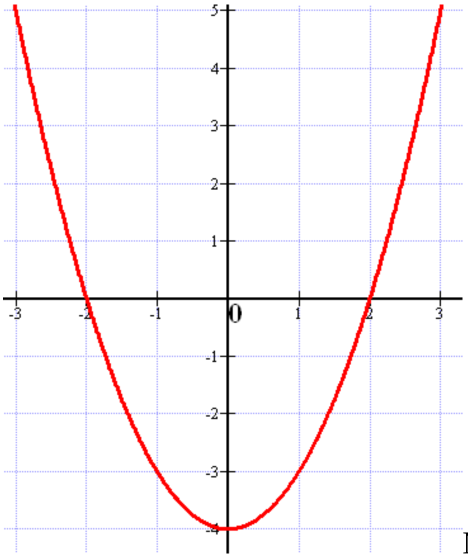


Y tenemos que $\text{Im}(f) = R$, pues el logaritmo neperiano va creciendo (aunque lentamente) hacia el infinito

3. FUNCIONES SIMÉTRICAS

Definición.- Una función y = f(x) se dice **simétrica respecto del eje de ordenadas o eje OY** o que tiene **simetría par** si f(-x) = f(x) para cualquier x del Dom(f)

Ejemplo 13:La función $f(x) = x^2 - 4$ es par como vemos por su representación gráfica.

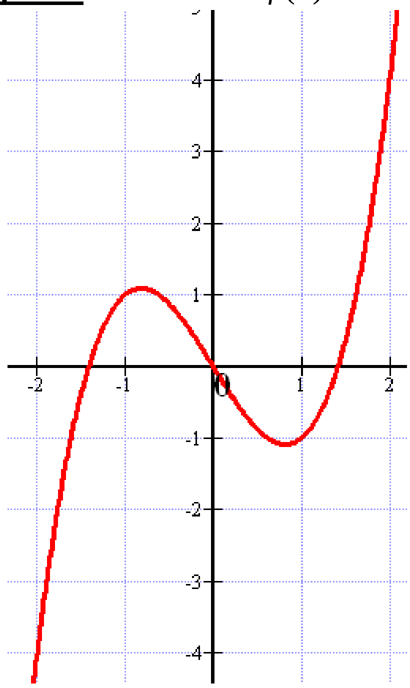


Matemáticamente demostramos que es par haciendo lo siguiente:

$$f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f(x)$$

Definición: Una función y = f(x) es **simétrica respecto del origen de coordenadas** o que tiene **simetría impar** si f(-x) = - f(x)

Ejemplo 14.- La función $f(x) = x^3 - 2x$ es impar como vemos por su representación gráfica



Matemáticamente demostramos que es impar haciendo lo siguiente:

$$f(-x) = (-x)^3 - 2\cdot(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x) = -f(x)$$

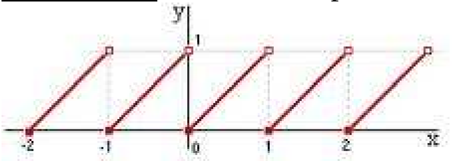
Propiedad: Para que una función pueda ser simétrica (par o impar) su dominio ha de ser simétrico respecto al origen de coordenadas

Ejemplo 15.- La función $f(x) = \ln x$ no puede ser simétrica pues su dominio es $(0,+\infty)$

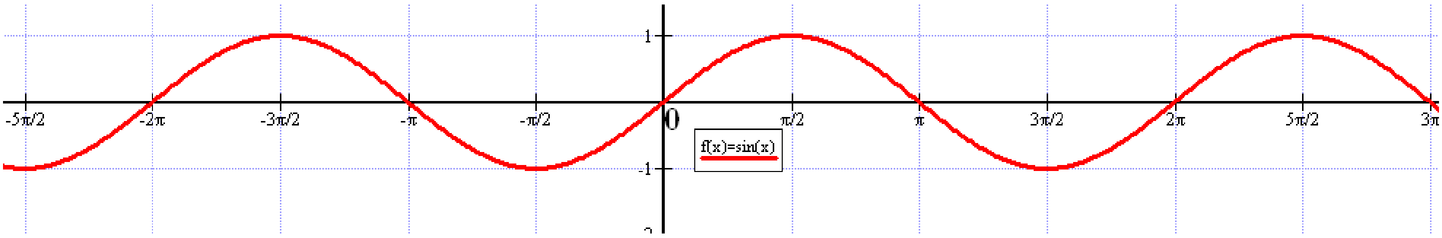
4. FUNCIONES PERIÓDICAS

Son funciones que se van repitiendo a lo largo del eje OX
Definición: Una función $y = f(x)$ es **periódica de periodo T** (T positivo), si cumple que $f(x+kT) = f(x)$ para cualquier valor de $x \in Dom(f)$

Ejemplo 16.- La función parte decimal Dec(x) = x – E(x) que ya hemos visto es periódica de periodo 1



Ejemplo 17.- La función $f(x) = senx$ es periódica de periodo 2π



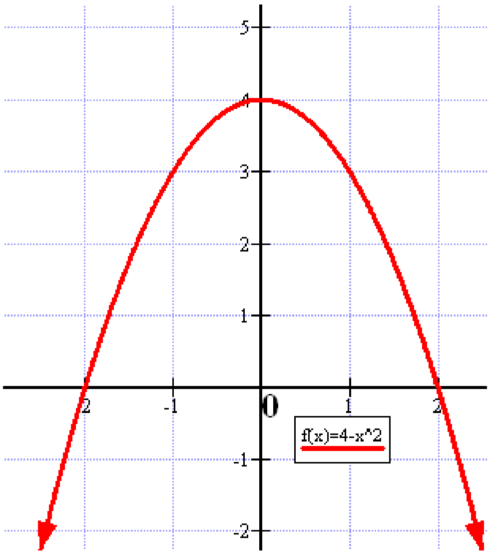
5. FUNCIONES ACOTADAS. EXTREMOS ABSOLUTOS

Definición.- Una función $y = f(x)$ está acotada superiormente por un nº real K si todos los valores que toma la función son menores o iguales que K, es decir, $f(x) \leq K \quad \forall x \in Dom(f)$ (NOTA: $\forall$ = para todo)
A K se le llama cota superior.

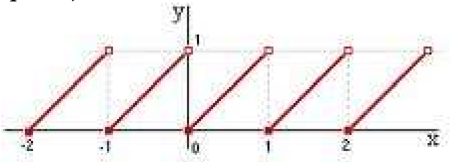
Definición.- Una función $y = f(x)$ está acotada inferiormente por un nº real P si todos los valores que toma la función son mayores o iguales que K, es decir, $f(x) \geq P \quad \forall x \in Dom(f)$
A P se le llama cota inferior

Definición.- Una función $y = f(x)$ está acotada si lo esta superior e inferiormente, es decir, $P \leq f(x) \leq K$ $\forall x \in Dom(f)$

Ejemplo 18.- La función $f(x) = 4 - x^2$ está acotada superiormente por 4 (ó 5 ó 6 ó ...) pero no está acotada inferiormente



Ejemplo 19.- La función parte decimal Dec(x) = x – E(x) que ya hemos visto está acotada. Por ejemplo, tiene como cota superior 1 (o cualquier otro nº mayor que 1) y como una cota inferior 0 (o cualquier otro nº menor que 0)



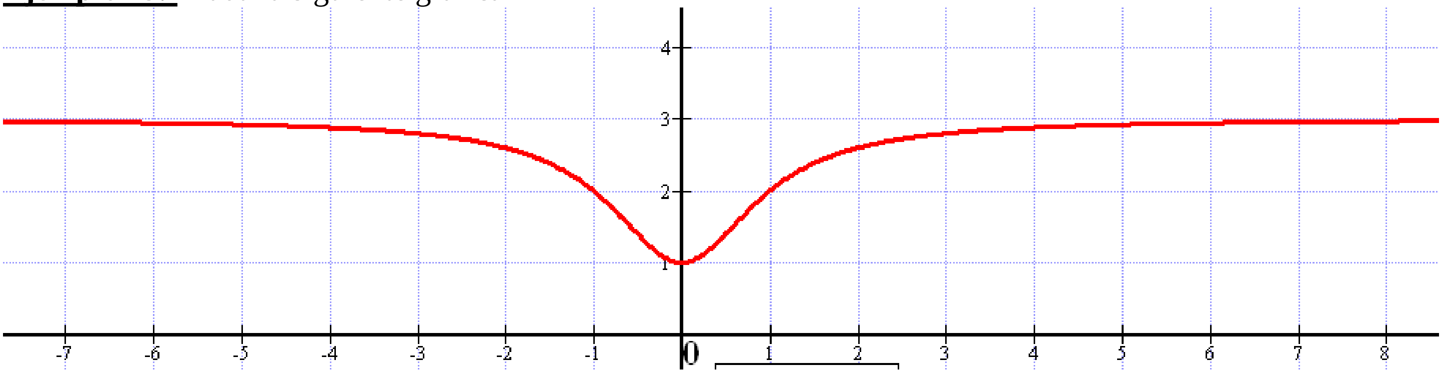
Definición.- Se llama **extremo superior o supremo** a la menor de las cotas superiores de una función acotada superiormente

Definición.- Se llama **máximo absoluto** de una función acotada superiormente al extremo superior o supremo cuando es alcanzado por la función

Definición.- Se llama **extremo inferior o ínfimo** a la mayor de las cotas inferiores de una función acotada inferiormente

Definición.- Se llama **mínimo absoluto** de una función acotada inferiormente al extremo inferior o ínfimo cuando es alcanzado por la función

Ejemplo 19.- Dada la siguiente gráfica

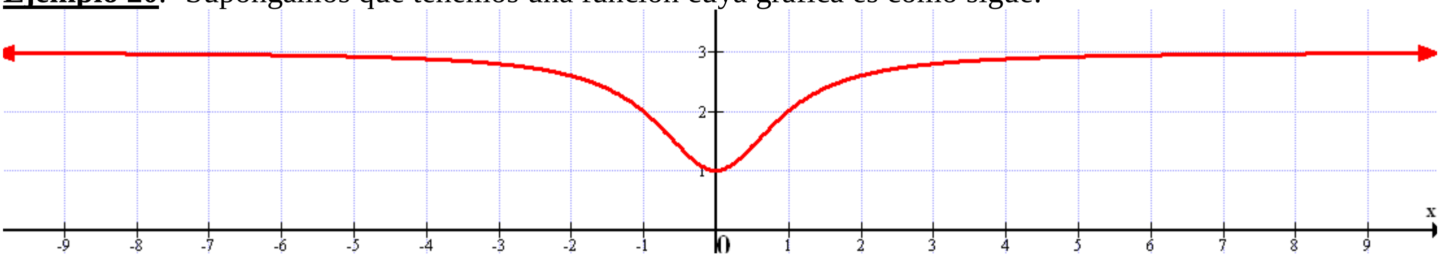


Podemos observar que es una función acotada.
La menor de las cotas superiores es 3 (3 es el extremo superior o supremo) pero la función no lo alcanza, luego no tiene máximo absoluto
La mayor de las cotas inferiores es 1 (1 es el extremo inferior o ínfimo) y además lo alcanza es el mínimo absoluto. Del mínimo absoluto podemos decir que es el punto (0,1), que lo alcanza en x = 0 o bien que es 1. Nosotros habitualmente usaremos las dos primeras expresiones.

6. MONOTONÍA. EXTREMOS RELATIVOS

Las definiciones que vienen en el libro en las páginas 194 y 195 no son necesarias saberlas. Aquí vamos a ver intuitivamente y mediante ejemplos los conceptos de función estrictamente creciente o decreciente y extremos (máximos y mínimos) relativos. Si os puede ayudar del libro los dibujos y gráficas que aparecen.

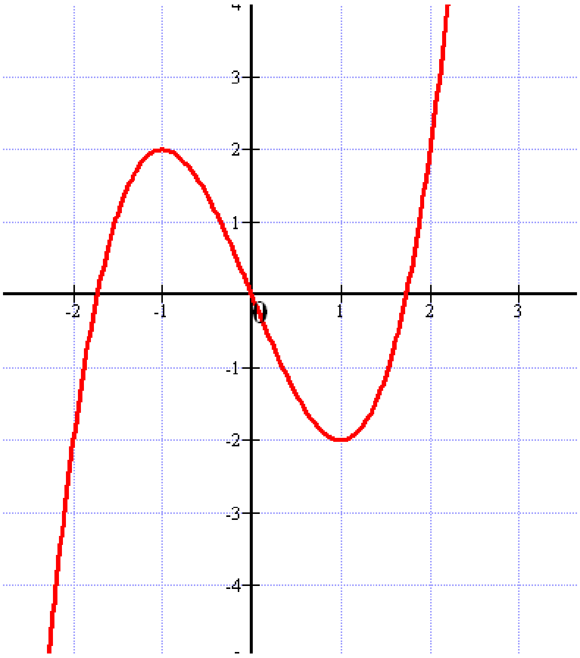
Ejemplo 20.- Supongamos que tenemos una función cuya gráfica es como sigue:



Viendo el dibujo podemos decir que:

- En $(-\infty,0)$, la función es estrictamente decreciente (se puede decir decreciente)
- En $(0.+\infty)$, la función es estrictamente creciente(se puede decir creciente)
- En $x_0 = 0$ (ó en (0,1)) , la función presenta un mínimo relativo que además es absoluto pues es la mayor de las cotas inferiores y la función lo alcanza
- No tiene máximos relativos

<u>Ejemplo 21</u>.- Lo mismo para



f es creciente en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

f es decreciente en $(-1,1)$

f tiene un máx. relativo en $x_0 = -1$. También se puede decir que tiene un máximo relativo en (-1,2)

f tiene un mín. relativo en $x_0 = 1$. También se puede decir que tiene un máximo relativo en (1,-2)

Como no está acotada no puede tener extremos absolutos

Es simétrica de simetría impar

No tiene periodicidad

7. <u>COMPOSICIÓN DE FUNCIONES</u>

<u>Definición</u>.- Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, tales que $\text{Im}(f)\subseteq Dom(g)$, se llama función compuesta de la función f con g (o f compuesta con g) a: $(g\circ f)(x) = g[f(x)]$
Es decir, aplicamos g al resultado de aplicar f a la variable independiente "x"
No es conmutativo, es decir, normalmente $g\circ f \neq f\circ g$

<u>Ejemplo 22</u>.- Sean $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=\dfrac{x^2}{2x-1}$, entonces

$$(g\circ f)(x) = g[f(x)] = g[\sqrt{x}] = \frac{(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}-1} = \frac{x}{2\sqrt{x}-1}$$

$$(f\circ g)(x) = f[g(x)] = f\left[\frac{x^2}{2x-1}\right] = \sqrt{\frac{x^2}{2x-1}}$$

8. FUNCION INVERSA

Dada una función $y = f(x)$, la función inversa de f es aquella que devuelve cada valor imagen a su original y se nota por $f^{-1}(x)$

Se tiene que cumplir que $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$
Además las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante (recuerdo que esta bisectriz tiene por ecuación $y = x$)

Ejemplo 23.- Calcular la inversa de $f(x) = \dfrac{3x}{2x-1}$

Partimos de $y = \dfrac{3x}{2x-1}$ →permutamos la “x” y la “y”, nos queda $x = \dfrac{3y}{2y-1}$ →despejamos “y”
→ $x \cdot (2y-1) = 3y$ → $2xy - x = 3y$ → $2xy - 3y = x$ →sacamos factor común
“y”→ $y \cdot (2x -) = x$ → $y = \dfrac{x}{2x-3}$ Y ya tenemos que $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{2x-3}$
Comprobación: Vamos a calcular $(f \circ f^{-1})(x)$ para ver que nos da la función identidad

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left[f^{-1}(x)\right] = f\left[\frac{x}{2x-3}\right] = \frac{3\dfrac{x}{2x-3}}{2\dfrac{x}{2x-3}-1} = \frac{\dfrac{3x}{2x-3}}{\dfrac{2x-2x+3}{2x-3}} = \frac{\dfrac{3x}{2x-3}}{\dfrac{3}{2x-3}} = \frac{3x}{3} = x$$

Lo mismo se puede hacer con $f^{-1} \circ f$

Gráficamente vemos que son simétricas respecto a la bisectriz de primer y tercer cuadrante