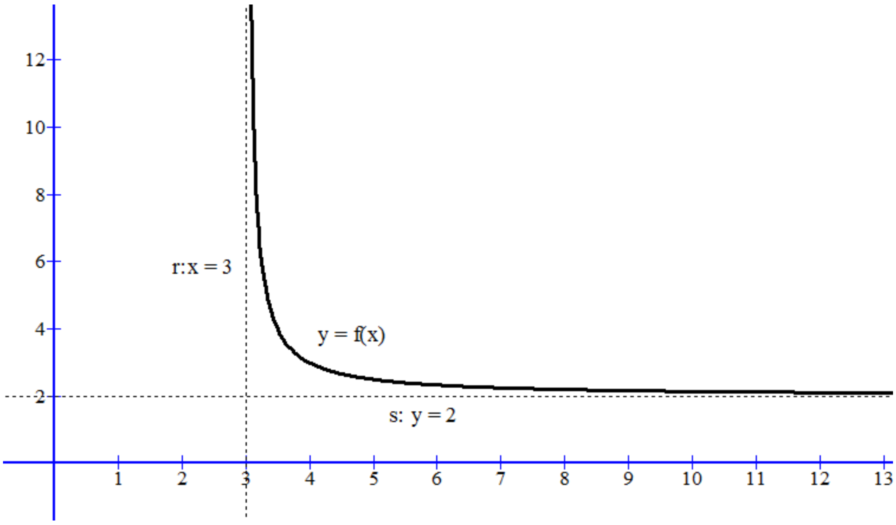
UNIDAD 4: **Representación gráfica de funciones**

1. ASÍNTOTAS DE UNA FUNCIÓN

Las asíntotas son rectas a las cuales la función se va aproximando indefinidamente, cuando por lo menos una de las variables (x o y) tienden al infinito.
Una definición más formal es:
Definición: Si un punto (x,y) se desplaza continuamente por una función y = f(x) de tal forma que, por lo menos, una de sus coordenadas tienda al infinito, mientras que la distancia entre ese punto y una recta determinada tiende a cero, esta recta recibe el nombre de asíntota de la función.
Veamos una gráfica:



Como vemos en esta gráfica la recta r se aproxima todo lo que queramos a la función (aunque no llega a cortarla o tocarla). A r se le llama asíntota vertical de f en x = 3 . Vemos que $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$

De manera análoga, vemos que tiene una asíntota horizontal en $+\infty$, que es la recta s: y = 2. Se observa que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$
Las asíntotas se clasifican en 3 tipos:

a. *Asíntotas verticales*

Son paralelas al eje OY. Son de la forma $r \equiv x = a$, donde a es un nº que cumple que el $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ es algún tipo de infinito: También vale cuando tendemos a a por la izquierda o por la derecha.
Estos números a suelen ser los puntos extremos de los intervalos del dominio.

Ejemplo 1: Calcula las AV (asíntotas verticales) de la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Primero el dominio de la función: $Dom(f) = R - \{1,-1\}$. Las posibles asíntotas verticales son x = 1 ó x = -1
Veamos que pasa con la función alrededor de esos puntos, calculando los límites:
En **x = 1**, hacemos los laterales pues aparece 0 en el denominador y nos interesa conocer el signo de la aproximación a 0.

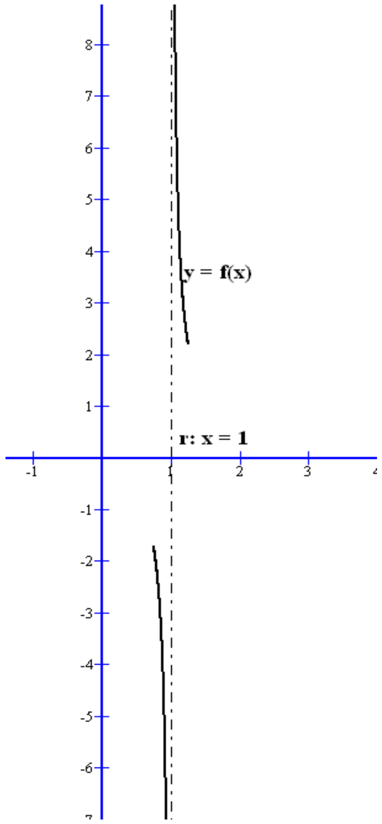
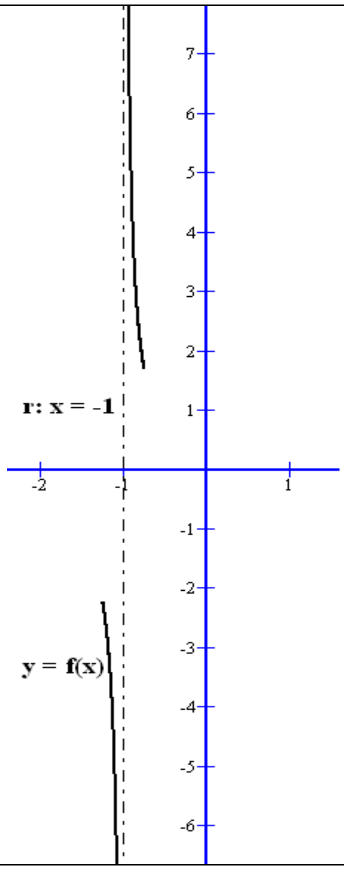
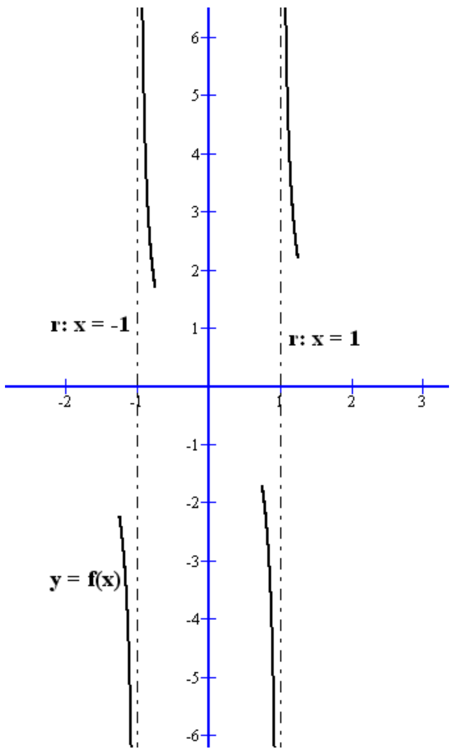
$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ → Al acercarnos por la derecha al 1, la función tiende a $+\infty$. Ya tenemos que la función tiene una asíntota vertical por la derecha en x = 1

$\underset{x \to 1^-}{lím} \dfrac{x}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \rightarrow$ Al acercarnos por la izquierda al 1, la función tiende a $-\infty$. Ya tenemos que la función tiene una asíntota vertical por la izquierda en x = 1.
De manera general, decimos que la recta r: x = 1 es una asíntota vertical.

En **x = -1**, hacemos los laterales pues aparece 0 en el denominador y nos interesa conocer el signo de la aproximación a 0.

$\underset{x \to -1^+}{lím} \dfrac{x}{x^2 - 1} = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty \rightarrow$ Al acercarnos por la derecha al -1, la función tiende a $+\infty$. Ya tenemos que la función tiene una asíntota vertical por la derecha en x = -1

$\underset{x \to -1^-}{lím} \dfrac{x}{x^2 - 1} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty \rightarrow$ Al acercarnos por la izquierda al 1, la función tiende a $-\infty$. Ya tenemos que la función tiene una asíntota vertical por la izquierda en x = -1.
De manera general, decimos que la recta r: x = -1 es una asíntota vertical.
Veamos gráficamente la información que nos ha aportado este estudio. Nos da una buena idea de la gráfica de la función

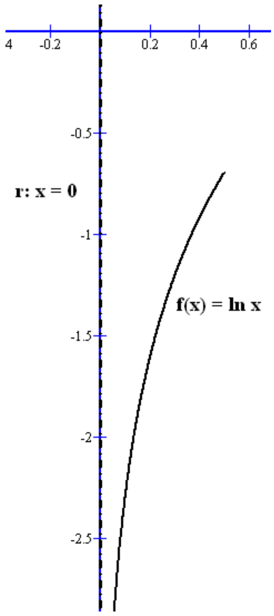
En x = 1	En x = -1	Las dos a la vez
		

Ejemplo 2: Calcula las AV (asíntotas verticales) de la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

En este caso, el dominio de la función $Dom(f) = R$, con lo cual no tiene A.V. y no hay que hacer nada más

Ejemplo 3: Calcula las asíntotas verticales de $f(x) = \ln x$
Como sabemos, $Dom(\ln) = (0, +\infty)$. Por tanto puede presentar una A.V. en x = 0. Veamos los límites laterales:

$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, como sabemos, luego r: x = 0 es una A.V. por la derecha
El límite lateral izquierdo en 0 no se puede calcular pues por ahí la función ln no está definida
Gráficamente tenemos algo así:

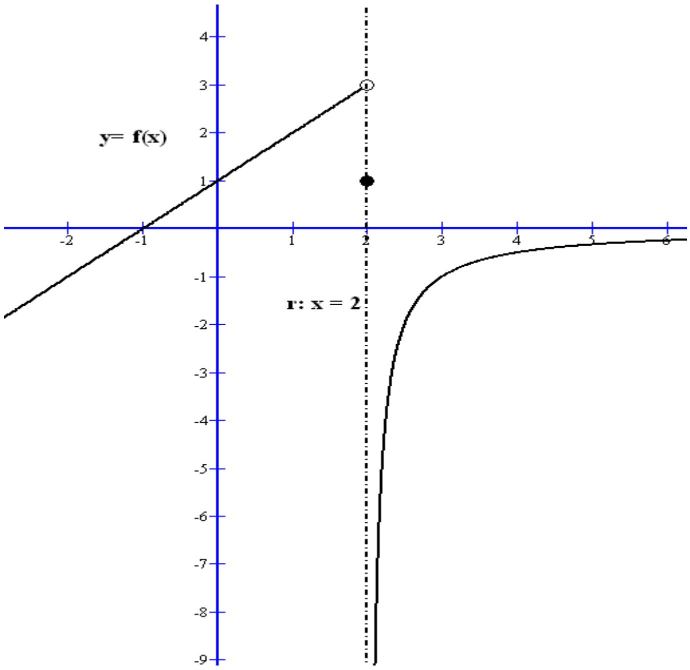


Ejemplo 4: Calcular las asíntotas verticales de $f(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad x<2 \\ 1 & sis \quad x=2 \\ \dfrac{-1}{x-2} & si \quad x>2 \end{cases}$

En este caso, también tenemos que $Dom(f) = R$, pero al ser definidas por partes, puede que tenga A.V. en los puntos que cambia de definición o en los puntos donde la función no este definida. Aquí sólo se plantea en x = 2, y vamos a calcular los límites laterales.

$\lim_{x \to 2^+} \dfrac{-1}{x-2} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$. Por la derecha hay A.V., que es r : x = 2

$\lim_{x \to 2^-} x+1 = 3$ →NO hay A.V. por la izquierda
Gráficamente esta función es así:



b. Asíntotas horizontales

Son rectas paralelas al eje OX, o sea, de la forma r: y = a. Ese nº a se calcula mediante los límites en el $+\infty$ y en el $-\infty$. Es decir, calcular $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

Como máximo una función sólo puede tener dos A.H.

Veamos ejemplos:

Ejemplo 5: Calcular las asíntotas horizontales de la función $f(x) = \dfrac{-4x^2-1}{2x^2+x}$

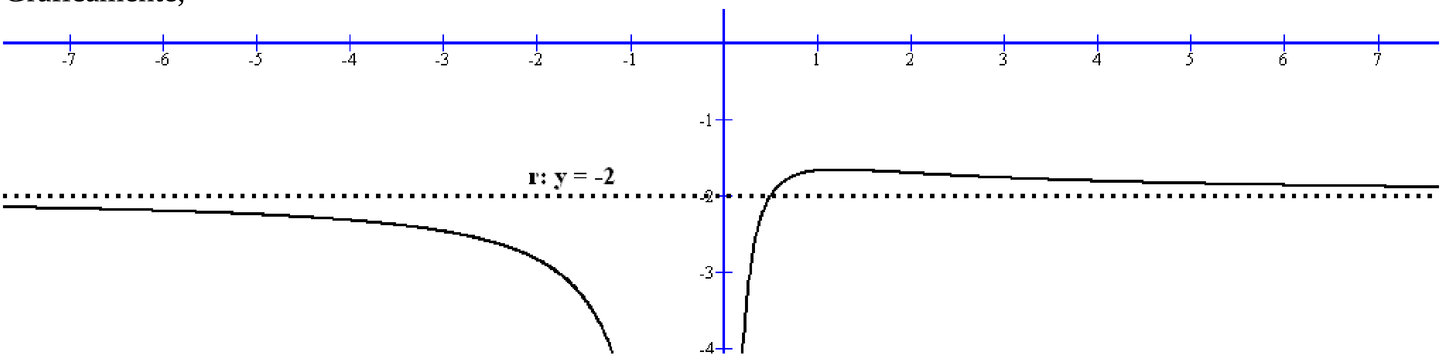
En esta función su dominio es $Dom(f) = R - \left\{0, -\dfrac{1}{2}\right\}$, que no influye para nada pues vamos a hacer límites en el infinito

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{-4x^2-1}{2x^2+x} = \dfrac{-4}{2} = -2$ → Como el límite existe, tenemos que la recta r: y = -2 es una asíntota horizontal en $+\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{-4x^2-1}{2x^2+x} = \dfrac{-4}{2} = -2$ → Como el límite existe, tenemos que la recta r: y = -2 es una asíntota horizontal en $-\infty$.

Como es la misma, podemos decir que la recta r: y = -2 es la asíntota horizontal

Gráficamente,



Ejemplo 6: Calcular las asíntotas horizontales de la función $f(x) = e^{-5x}$

El dominio es todo R. Vamos calcular los límites en infinito:

$\lim_{x \to +\infty} e^{-5x} = 0$ → La recta r: y = 0 es A.H. en $+\infty$

$\lim_{x \to -\infty} e^{-5x} = +\infty$ → No tiene A.H. en $-\infty$ Observamos que tiene por un lado y por otro no

Ejemplo 7: Calcular las asíntotas horizontales de la función $f(x) = \dfrac{x^3-x+1}{x^2-5x}$

Os dejo a vosotros comprobar que no tiene asíntotas horizontales.

c. Asíntotas oblicuas

Son aquellas que son inclinadas (pendiente distinta de 0). Serán rectas de la forma r: y = mx + n

Hay que hacer límites también en $+\infty$ y en $-\infty$ para calcular los valores de m y n y son los siguientes:

En $+\infty$	En $-\infty$
$m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$	$m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
$n = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - mx\right]$	$n = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[f(x) - mx\right]$

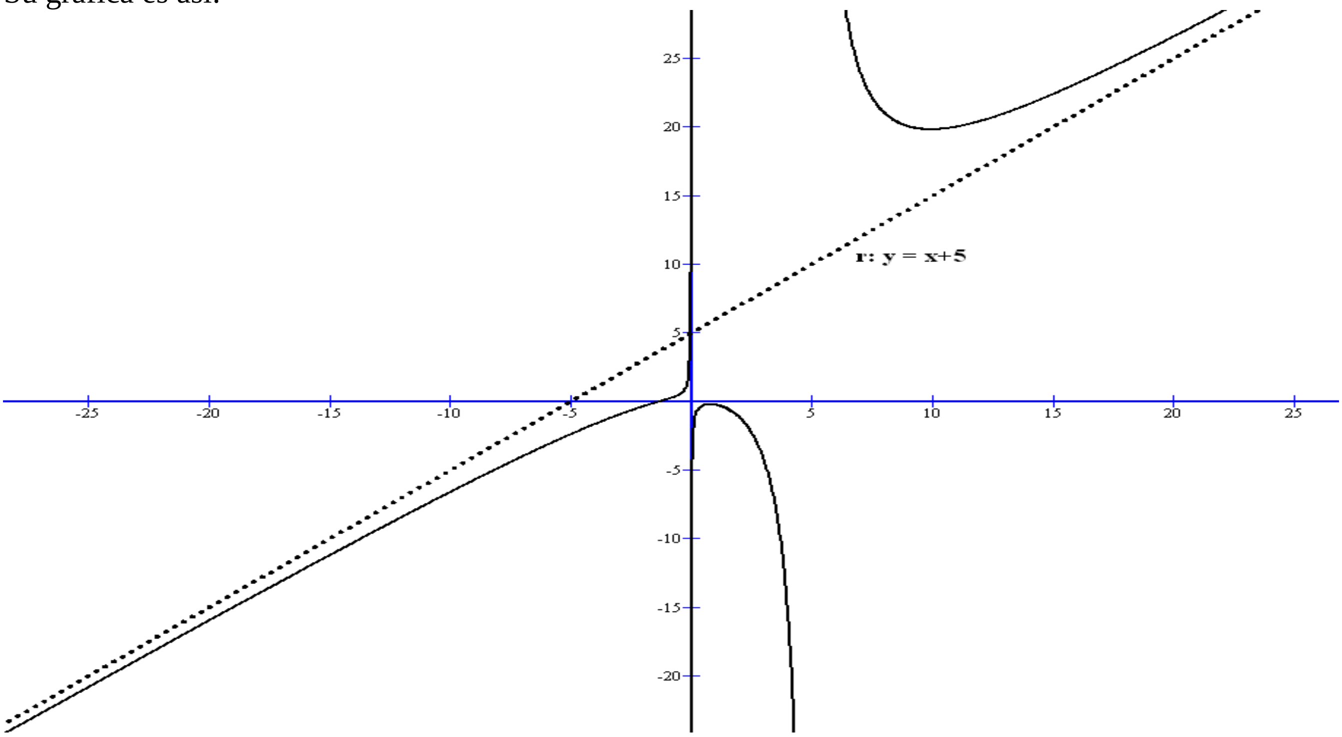
Propiedad: Si una función y = f(x) tiene asíntotas horizontales no puede tener asíntotas oblicuas en el correspondiente infinito.

Ejemplo 8: Calcular las asíntotas oblicuas de la función $f(x) = \dfrac{x^3 - x + 1}{x^2 - 5x}$

Tenemos que $Dom(f) = R - \{0{,}5\}$, que no nos influye en el cálculo de las A. O.

En $+\infty$	En $-\infty$ (todo es análogo a $+\infty$)
$m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{x^3 - x + 1}{x^2 - 5x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 - x + 1}{x\cdot(x^2 - 5x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 - x + 1}{x^3 - 5x^2} = 1$	$m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$=1 Hacedlo vosotros
$n = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{x^3 - x + 1}{x^2 - 5x} - x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{x^3 - x + 1 - (x^3 - 5x^2)}{x^2 - 5x}\right] =$ $= \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{5x^2 - x + 1}{x^2 - 5x}\right] = 5$	$n = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[f(x) - mx\right]$=5 Hacedlo vosotros
La A.O. en $+\infty$ es: $r: y = x + 5$	La A.O. en $-\infty$ es: $r: y = x + 5$

Su gráfica es así:



Ejemplo 9: Sea la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x^2+1}{x+3} & si \quad x<0\\ \dfrac{3x-1}{2x-3} & si \quad x>0\end{cases}$. Calcular sus A. Oblicuas

El dominio de esta función es : $Dom(f)=R-\left\{0,-3,\frac{3}{2}\right\}$ En los reales que no son del dominio es donde puede presentar asíntotas verticales.

En $+\infty$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x-1}{2x-3}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{x\cdot(2x-3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{2x^2-3x}=0$$

→ La pendiente es 0, luego no puede ser una asíntota oblicua, en todo caso será horizontal. Veamos si tiene horizontal: $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{2x-3}=\frac{3}{2}$ → $r\equiv y=\frac{3}{2}$ es asíntota horizontal en $+\infty$ (esto no era necesario, pues no lo pedía el problema)

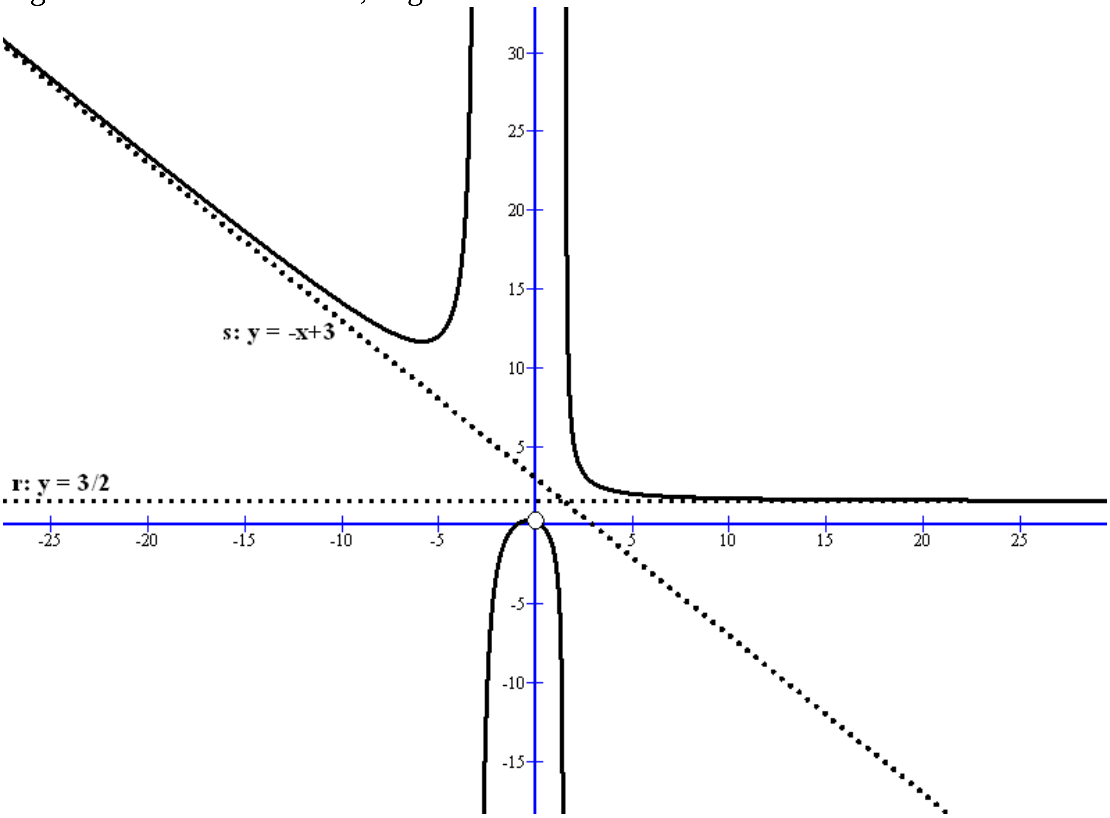
En $-\infty$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{-x^2+1}{x+3}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+1}{x\cdot(x+3)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+1}{x^2+3x}=-1$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-x^2+1}{x+3}-(-x)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-x^2+1+x^2+3x}{x+3}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{3x+1}{x+3}\right]=3$$

La recta $s\equiv y=-x+3$ es A. Oblicua en $-\infty$

Para que veáis gráficamente lo calculado, la gráfica de la función con sus asíntotas es:



2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Vamos a intentar con los conocimientos que tenemos representar de forma aproximada de funciones y básicamente nos vamos a apoyar en el estudio de: dominio, simetrías, periodicidad, cortes con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, extremos locales, intervalos de concavidad (f''(x)>0) y de convexidad (f''(x)<0), puntos de inflexión y una tabla de valores para afinar.
Vamos a hacerlo mediante ejemplos:

Ejemplo 10: Representar gráficamente la función $y = x^3 - x^2 - 8x + 12$

Dominio: $Dom(y) = R$ por ser polinómica.

Simetrías: $y(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 - 8(-x) + 12 = -x^3 - x^2 + 8x + 12 \neq \begin{cases} y(x) \\ -y(x) \end{cases}$. Luego no presenta simetría

Periodicidad: Las funciones polinómicas no son periódicas

Cortes con los ejes:

Eje de abscisa (eje OX): Resolvemos el sistema: $\begin{cases} y = x^3 - x^2 - 8x + 12 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$

Resolvemos por Ruffini y nos queda: $(x-2)^2 \cdot (x+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$. Por tanto, los puntos de corte son: (2,0) y (-3,0)

Eje de ordenadas (eje OY): Resolvemos el sistema: $\begin{cases} y = x^3 - x^2 - 8x + 12 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = 12$ Punto de corte (0,12)

Asíntotas:

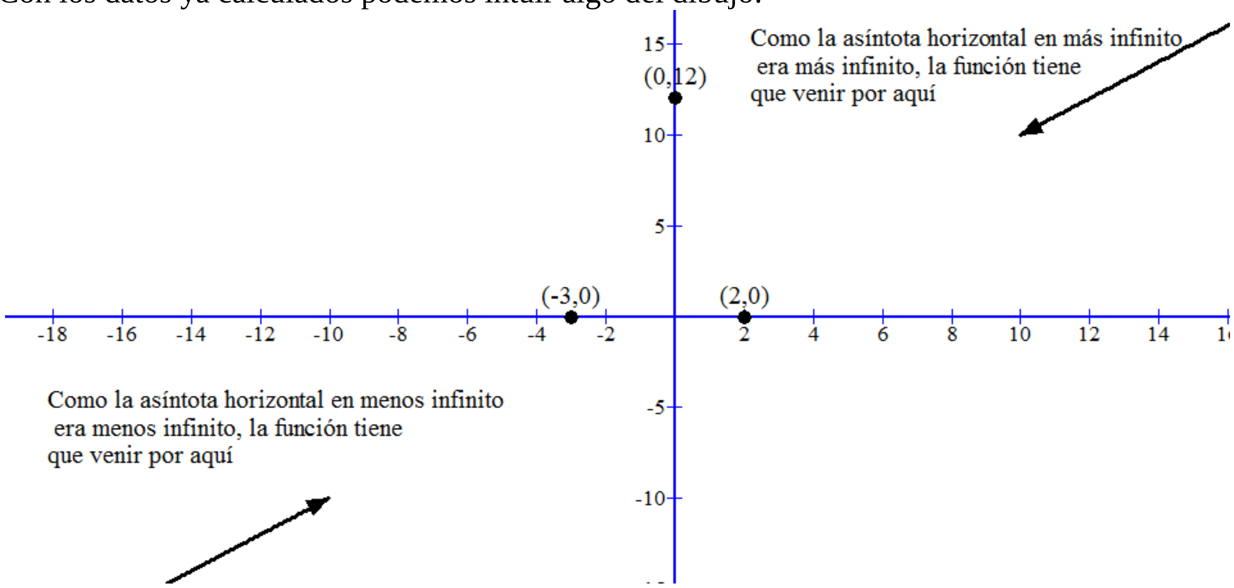
Asín. verticales: No tiene pues su dominio es todo R y es continua

Asín. Horizontales: En $+\infty$, calculamos $\lim_{x \to +\infty} (x^3 - x^2 - 8x + 12) = +\infty$, no tiene

En $-\infty$, calculamos $\lim_{x \to -\infty} (x^3 - x^2 - 8x + 12) = -\infty$, no tiene. Nos aportan información de por donde va el dibujo al irnos para infinito

Asín. Oblicuas: En $+\infty$, calculamos $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x} = +\infty$, no tiene. En $-\infty$, ocurre igual.

Con los datos ya calculados podemos intuir algo del dibujo:



Intervalos de crecimiento y decrecimiento (monotonía):

Derivamos la función $y = x^3 - x^2 - 8x + 12 \rightarrow y' = 3x^2 - 2x - 8$. Igualamos a 0: $3x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \dfrac{-4}{3} \end{cases}$

Hacemos la tabla de signos:

	$\left(-\infty, \frac{-4}{3}\right)$	$\left(\frac{-4}{3}, 2\right)$	$(2, +\infty)$
$y' = 3x^2 - 2x - 8$	+	-	+
	Creciente	Decreciente	Creciente

Extremos locales:

Con el estudio de la monotonía ya obtenemos los extremos locales sin tener que aplicar el criterio de la 2ª derivada.

En $x = \frac{-4}{3}$, tiene un máximo relativo. El punto en concreto es $\left(\frac{-4}{3}, \frac{500}{27}\right)$

En $x = 2$, la función tiene un mínimo relativo. El punto en concreto es $(2,0)$

Intervalos de concavidad (curvatura):

Hacemos la 2ª derivada: $y' = 3x^2 - 2x - 8 \rightarrow y'' = 6x - 2$ Igualamos a 0: $6x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$

Hacemos la tabla de signos correspondiente:

	$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$
$y'' = 6x - 2$	-	+
	Cóncava $\cap$	Convexa $\cup$

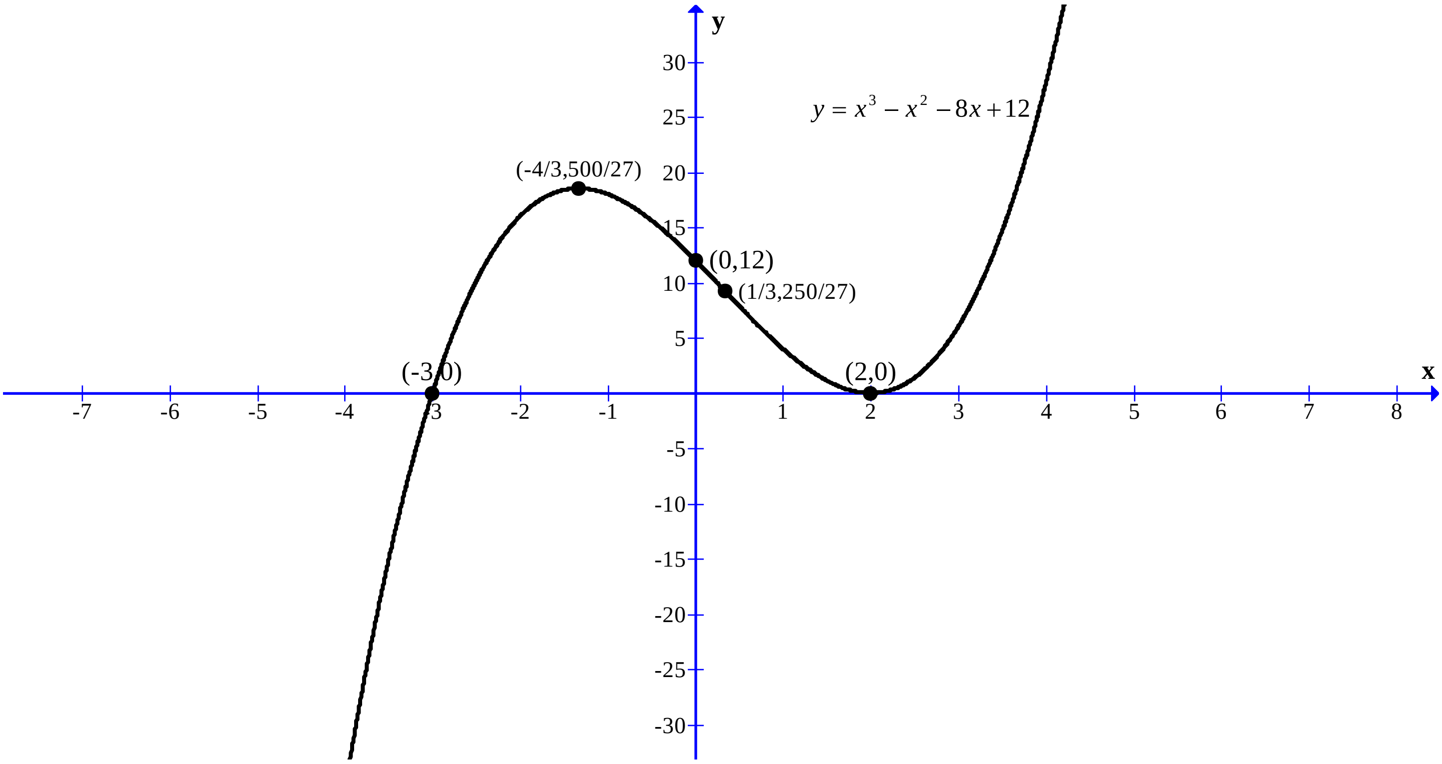
Puntos de inflexión:

Por lo visto en la curvatura, en $x = \frac{1}{3}$ la función tiene un punto de inflexión cóncavo-convexo. El punto en concreto con sus coordenadas es $\left(\frac{1}{3}, \frac{250}{27}\right)$

Pequeña tabla de valores:

X	Y
-2	16
-1	18
1	4
3	6
4	28

Con lo cual ya podemos hacer un esbozo bastante curioso de la función: (sólo hemos puesto los extremos, puntos de inflexión y puntos de corte con los ejes)



Ejemplo 11: Representar gráficamente la función $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

Dominio: Por ser irracional de índice par tenemos que hacer una tabla de signos para saber dónde el radicando es positivo o 0. Veamos dónde se anula el radicando: $9 - x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$

Tabla de signos:

	$(-\infty,-3)$	$(-3,3)$	$(3,+\infty)$
$9 - x^2$	-	+	-
	No son del dominio	Son del dominio	No son del dominio

Por último vemos que ocurre en $\begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(3) = \sqrt{9 - 3^2} = 0 \\ f(-3) = \sqrt{9 - (-3)^2} = 0 \end{cases}$ que tienen sentido y además hemos calculado dos puntos por dónde pasa la función (3,0) y (-3,0) que son puntos de corte con el eje OX.
En definitiva, $Dom(f) = [-3,3]$

Simetrías: $f(-x) = \sqrt{9 - (-x)^2} = \sqrt{9 - x^2} = f(x)$. Luego presenta simetría par. Es simétrica respecto al eje OY
Periodicidad: Obviamente no es periódica

Cortes con los ejes:

Eje de abscisa (eje OX): Resolvemos el sistema: $\begin{cases} y = \sqrt{9 - x^2} \\ y = 0 \end{cases}$ →Ya lo hemos resuelto en el dominio, los puntos de corte son: (3,0) y (-3,0)

Eje de ordenadas (eje OY): Resolvemos el sistema: $\begin{cases} y = \sqrt{9 - x^2} \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = 3$ Punto de corte (0,3)

Asíntotas:

Asín. verticales: No tiene pues es continua en su dominio y en x = 3 y x = -3, la función toma un valor (no se va a ningún infinito).
Asín. Horizontales: En $+\infty$ y $-\infty$, no podemos calcular los límites pues está fuera del dominio. Por tanto no hay

Asín. Oblicuas: Lo mismo que en las horizontales

Intervalos de crecimiento y decrecimiento (monotonía):

Derivamos la función $f(x)=\sqrt{9-x^2} \rightarrow f'(x)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}=\dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$. Igualamos a 0:

$\dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}}=0 \rightarrow -x=0 \rightarrow x=0$ Observad además que la función no es derivable en $\begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases}$ pues estos valores anulan el denominador de la derivada

Hacemos la tabla de signos:

	$(-3,0)$	$(0,3)$
$f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$	+	-
	Creciente	Decreciente

Extremos locales:

Con el estudio de la monotonía ya obtenemos los extremos locales sin tener que aplicar el criterio de la 2ª derivada.

En $x=0$, tiene un máximo relativo. El punto en concreto es $(0,3)$. Además como la función es continua y en los extremos del dominio los valores que alcanza la función son menores que este máximo relativo, pues es un máximo absoluto.

Intervalos de concavidad (curvatura):

Hacemos la 2ª derivada: $f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}} \rightarrow f''(x)=\dfrac{-1\cdot\sqrt{9-x^2}-(-x)\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}}{(\sqrt{9-x^2})^2}$

$\rightarrow f''(x)=\dfrac{-\sqrt{9-x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} \rightarrow f''(x)=\dfrac{\dfrac{-(9-x^2)-x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{(9-x^2)} \rightarrow f''(x)=\dfrac{-9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$ Igualamos a 0:

$\dfrac{-9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}=0$ y como vemos no se anula nunca.

Hacemos la tabla de signos correspondiente: (en este caso no seria necesario siempre sale – porque el numerador es –9 y el denominador siempre es positivo al ser $x\in(-3,3)$

	$(-3,3)$
$f''(x)=\dfrac{-9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$	-
	Cóncava $\cap$

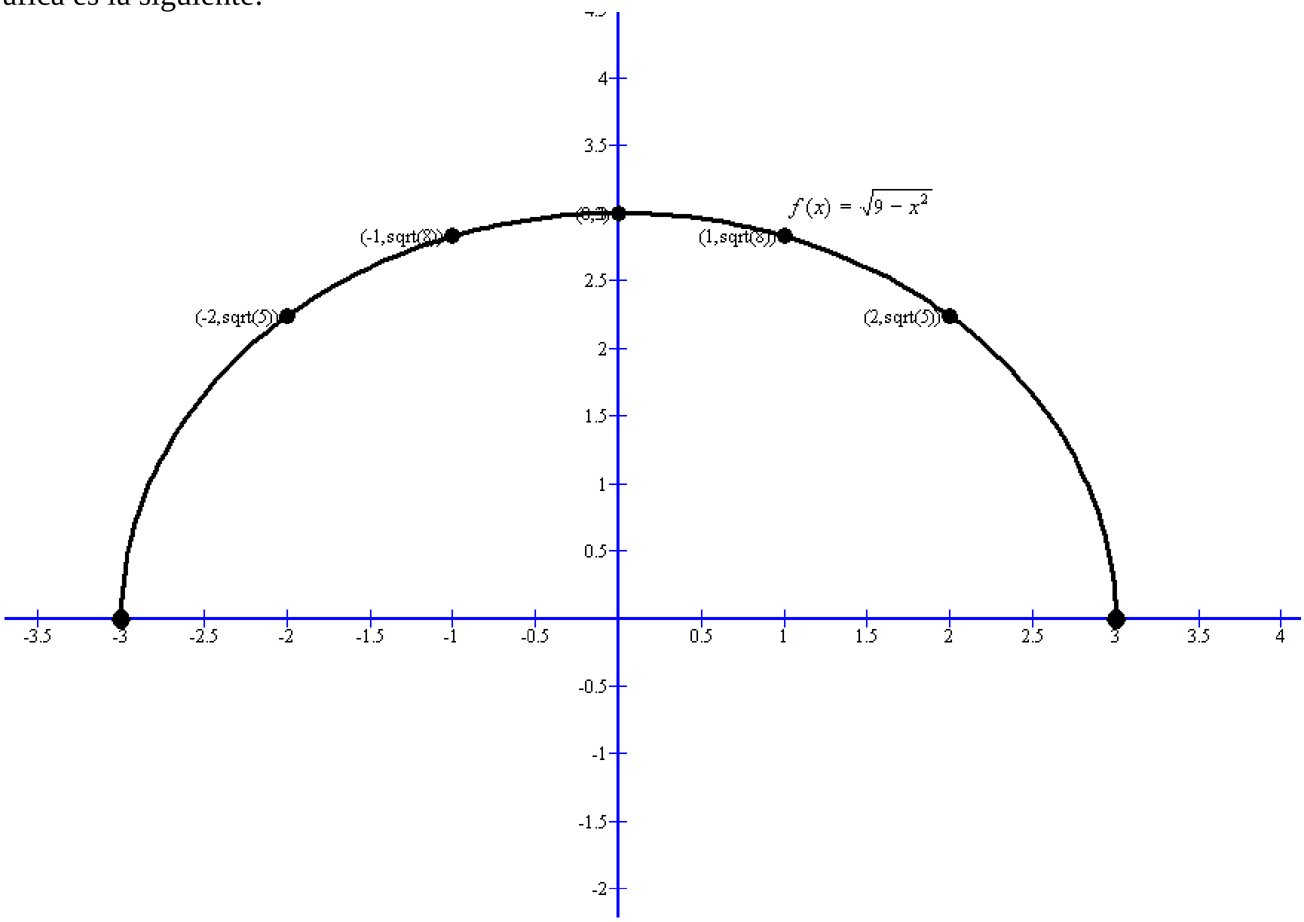
Puntos de inflexión:

No tiene pues no hay cambio de curvatura y además no se anula la derivada 2ª

Pequeña tabla de valores:

X	Y
-2	$\sqrt{5}$
-1	$2\sqrt{2}$
1	$2\sqrt{2}$
2	$\sqrt{5}$

La gráfica es la siguiente:



Como podéis observar es una semicircunferencia. Este problema se podía haber hecho con los conocimientos de cónicas dados en 1º Bachillerato, pues de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ (que tiene centro en (0,0) y radio 3), si despejamos la y nos resulta $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$. Si nos quedamos con el signo +, nos da la función y con el signo – la otra semicircunferencia.

Ejemplo 12: Representar gráficamente la función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

Dominio: Por ser racional tenemos que saber dónde se anula el denominador: $x^2 - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

Así, $Dom(f) = R - \{1, -1\}$

Simetrías:. $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{-x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$ Luego presenta simetría impar. Es simétrica respecto al origen de coordenadas

Periodicidad: Obviamente no es periódica

Cortes con los ejes:

Eje de abscisa (eje OX): Resolvemos el sistema: $\begin{cases} y = \dfrac{x^3}{x^2-1} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 0$ Punto de corte (0,0)

Eje de ordenadas (eje OY): Resolvemos el sistema: $\begin{cases} y = \dfrac{x^3}{x^2-1} \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = 0$ Punto de corte (0,0)

Asíntotas:

Asín. verticales: Puede presentar A.V.. en x = 1 y en x = -1, que son los dos puntos que no son del dominio y anulan el denominador (al dividir por 0 puede que se vaya a infinito)

En x = 1: Hacemos los límites laterales:

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^3}{x^2-1} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ y por la izquierda $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^3}{x^2-1} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$ La recta vertical r: x = 1 es una A.V. Por la derecha la función se va a $+\infty$ y por la izquierda a $-\infty$

En x = -1: Hacemos los límites laterales:

$\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^3}{x^2-1} = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$ y por la izquierda $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^3}{x^2-1} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$ La recta vertical r: x = -1 es una A.V. Por la derecha la función se va a $+\infty$ y por la izquierda a $-\infty$

Asín. Horizontales: En $+\infty$, calculamos $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2-1} = +\infty$, no tiene

En $-\infty$, calculamos $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2-1} = -\infty$, no tiene.

Nos aportan información de por donde va el dibujo al irnos para infinito.

Asín. Oblicuas: En $+\infty$, calculamos $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2-1} : x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^3-x} = 1$, y ahora

$n = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2-1} - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-x^3+x}{x^3-x} = 0$. La recta b: y = x (conocida como bisectriz del primer y tercer cuadrante) es A. Oblicua en $+\infty$

En $-\infty$, el proceso es totalmente análogo y resulta que también la recta b: y = x es A. Oblicua en $-\infty$

NOTA: Una opción interesante una vez obtenidas las asíntotas, es calcular los puntos de corte de las asíntotas horizontales y oblicuas con la función, que nos pueden ayudar a determinar si la función va a un lado o a otro de la asíntota. Lo hacemos con la única asíntota oblicua: $\begin{cases} y = \dfrac{x^3}{x^2-1} \\ y = x \end{cases} \rightarrow \dfrac{x^3}{x^2-1} = x \rightarrow$

$x^3 = x^3 - x \rightarrow x = 0$ El punto de corte es (0,0)

Intervalos de crecimiento y decrecimiento (monotonía):

Derivamos la función $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ → $f'(x)=\dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$. Igualamos a 0: $\dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=0$ → $x^4-3x^2=0$

→ $x^2\cdot(x^2-3)=0$ → $\begin{cases} x=0 \\ x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3}\end{cases}$

Hacemos la tabla de signos:

	$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$	$\left(-\sqrt{3},-1\right)$	$\left(-1,1\right)$	$\left(1,\sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3},+\infty\right)$
$f'(x)=\dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=\dfrac{x^2\cdot\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$ Si nos fijamos, para el signo sólo hay que estudiar el factor $\left(x^2-3\right)$	+	-	-	-	+
	Creciente	Decreciente	Decreciente	Decreciente	Creciente

Extremos locales:

Con el estudio de la monotonía ya obtenemos los extremos locales sin tener que aplicar el criterio de la 2ª derivada.

En $x=-\sqrt{3}$, tiene un máximo relativo. El punto en concreto es $\left(-\sqrt{3},\dfrac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$

En $x=\sqrt{3}$, la función tiene un mínimo relativo. El punto en concreto es $\left(\sqrt{3},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

En $\begin{cases} x=1 \\ x=-1\end{cases}$ por no ser del dominio, no tiene sentido estudiar extremos.

Intervalos de concavidad (curvatura):

Hacemos la 2ª derivada: $f'(x)=\dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$ → $f''(x)=\dfrac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2-(x^4-3x^2)\cdot 2\cdot(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}$ →Sacamos factor común (x^2-1) del numerador → $f''(x)=\dfrac{(x^2-1)\left[(4x^3-6x)(x^2-1)-(x^4-3x^2)\cdot 4x\right]}{(x^2-1)^4}$ →Simplificamos y operamos en el corchete, quedándonos: $f''(x)=\dfrac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$ Igualamos a 0:

$f''(x)=\dfrac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}=0$ → $2x^3+6x=0$ → $2x\left(x^2+3\right)=0$ → $x=0$ es la única solución

Hacemos la tabla de signos correspondiente: (en este caso no sería necesario siempre sale – porque el numerador es –9 y el denominador siempre es positivo al ser $x\in\left(-3,3\right)$

	$\left(-\infty,-1\right)$	$\left(-1,0\right)$	$\left(0,1\right)$	$\left(1,+\infty\right)$
$f''(x)=\dfrac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$	-	+	-	+
	Cóncava $\cap$	Convexa $\cup$	Cóncava $\cap$	Convexa $\cup$

Puntos de inflexión:
En x = 0 hay un punto de inflexión convexo-cóncavo. Nuevamente x = 1 y x = -1 no son tenidos en cuenta para ser candidatos a puntos de inflexión pues no son del dominio.
Pequeña tabla de valores:

X	Y
-3	-27/8
-2	-8/3
-1/2	1/6
1/2	-1/6
2	8/3
3	27/8

Y la gráfica teniendo en cuenta todos los datos nos queda: