UNIDAD 9: Sistemas de ecuaciones lineales

1. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un ***sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas*** es toda expresión del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{cases}$$

Llamamos:

- ***Coeficientes del sistema*** a los números reales a_{ij}
- ***Términos independientes*** a los números reales b_i
- ***Incógnitas*** a los x_j que deben ser calculados

Resolver un sistema es encontrar las posibles soluciones del mismo, es decir, los valores que pueden tomar las incógnitas de manera que se verifican simultáneamente las m ecuaciones.

Diremos que dos sistemas de ecuaciones son ***equivalentes*** si tiene las mismas soluciones.

Ejemplos de sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$ es un sistema lineal de 2 ecuaciones con 2 incógnitas. Tiene una única solución que es $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$ es un sistema lineal de 3 ecuaciones con 2 incógnitas. No tiene solución.

c) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}$ es un sistema lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Tiene infinitas soluciones que son de la forma: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$ con $\lambda \in R$

TIPOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES EN FUNCIÓN DE SUS TÉRMINOIS INDEPENDIENTES

a) *Homogéneos*: Todos los términos independientes son nulos.

$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}$ es un sistema homogéneo

b) *No homogéneos*: Alguno de los términos independientes es no nulo

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$$ es un sistema no homogéneo

TIPOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES EN FUNCIÓN DE SUS SOLUCIONES

a) *Incompatibles*: Son aquellos que no tienen solución

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$$ es un sistema incompatible.

b) *Compatibles*: Son aquellos que tienen solución

- *Compatibles determinados*: Cuando la solución es única.

  $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$ es compatible determinado. Su única solución es $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

- *Compatibles indeterminados*: Cuando tienen infinitas soluciones.

  $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}$ es compatible indeterminado. Sus soluciones que son de la forma: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$

  con $\lambda \in R$.

EXPRESIÓN MATRICIAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES

Un sistema de ecuaciones $\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \text{...} \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + ... + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$ se puede expresar **matricialmente** de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

A la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ se le llama **matriz de coeficientes** o **principal**.

A la matriz columna $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ se le llama **matriz o vector de las incógnitas**

A la matriz columna $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$ se le llama **matriz o vector de términos independientes**.

De manera reducida podemos notar el sistema de ecuaciones de forma matricial así: $A\cdot X = B$

<u>Ejemplo 1</u>: Dado el sistema $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$, su expresión matricial es: $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

<u>EXPRESIÓN VECTORIAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES</u>

Un sistema de ecuaciones $\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + ... + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + ... + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + ... + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{cases}$ se puede expresar **vectorialmente** de la siguiente forma:

$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix}\cdot x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix}\cdot x_2 + ... \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix}\cdot x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$, es decir de la forma, $A_1\cdot x_1 + A_2\cdot x_2 + ... + A_n\cdot x_x = B$ donde las A_j son las columnas de la matriz de coeficientes.

<u>Ejemplo 2</u>. El sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}$ se pone de forma vectorial como: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot y + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. <u>TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS</u>

Dado un sistema de ecuaciones $\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + ... + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + ... + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + ... + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{cases}$, además de la matriz de coeficientes

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ que es de dimensión $m\times n$, podemos considerar otra matriz de dimensión $m\times(n+1)$, que resulta de añadir la columna de términos independientes a la matriz de coeficientes. A esta matriz la llamaremos **<u>matriz ampliada</u>** del sistema y se nota por A^*

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

<u>Teorema de Rouché-Fröbenius</u>: Dado un sistema de ecuaciones, se tiene que:

El sistema es compatible $\Leftrightarrow$ $\text{rango}\,(A) = \text{rango}\,(A^*)$

<u>Consecuencias del</u> <u>Teorema de Rouché-Fröbenius</u>:

1: Si $\text{rango}\,(A) \neq \text{rango}\,(A^*)$, entonces el sistema es incompatible

2: Si $\text{rango}\,(A) = \text{rango}\,(A^*)$ = nº de incógnitas (n), entonces es un sistema compatible determinado

3: Si $\text{rango}\,(A) = \text{rango}\,(A^*)$ < nº de incógnitas (n), entonces es un sistema compatible indeterminado

<u>Ejemplo 2</u>: Estudiar o discutir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \\ -x - y - z = -3 \end{cases}$$

Consideramos la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

Empezamos calculando el *<u>rango de A</u>*:

<u>Menores de orden 3</u>: Sólo hay uno que es el determinante de A→ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ = (para recordar lo hacemos haciendo ceros y desarrollando, hacemos $F_1 + F_3$ y $F_2 + F_3$)→

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$ → rango(A) = 3

Calculamos ahora el *<u>rango de A*</u>*:

<u>Menores de orden 3</u>: Si nos fijamos A es una submatriz de A*, por tanto el rango (A*)$\geq$rango (A) siempre, y por tanto en este caso $\boxed{\text{rango (A*)} \geq 3}$. Además como A* es de dimensión 3x4, tenemos que $\boxed{\text{rango (A*)} \leq 3}$, Así rango (A*) = 3.

Entonces, rango (A) = rango (A*) = 3 = nº de incógnitas, y por el teorema de Rouché-Fröbenius, se trata de un sistema compatible determinado (tiene una única solución)

<u>Ejemplo 3</u>: Clasificar el siguiente sistema de ecuaciones dependiendo del valor del parámetro m :

$$\begin{cases} x - my + z = 1 \\ x + y + z = m + 2 \\ x + y + mz = 4 \end{cases}$$

Tenemos la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \text{m}+2 \\ 1 & 1 & m & 4 \end{pmatrix}$.

Estudiaremos el rango de A en función del parámetro m

Empezamos calculando el determinante de A que es el mayor menor de orden 3 de A, pues ésta es cuadrada.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m - m + 1 - 1 - 1 + m^2 = m^2 - 1$ Igualamos a 0, $m^2 - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$ Con estos resultados tenemos 3 posibilidades o casos: $m \neq \pm 1$, $m = 1$ y $m = -1$

CASO 1: $m \neq \pm 1$

Como $m \neq \pm 1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$rango(A) = 3 pues el mayor menor no nulo es el determinante de la propia A.

Además como la matriz ampliada, A*, es de dimensión 3×4, y A es una submatriz suya, obviamente tenemos que rango(A*) = 3

Por tanto, concluimos que en este caso como rango(A) = rango(A*) = 3 =nº de incógnitas se trata de un sistema compatible determinado por el teorema de Rouché-Fröbenius

CASO 2: $m = 1$

Lo primero que hacemos es sustituir el valor en el sistema y en las matrices asociadas

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Como podemos observar fácilmente en el sistema de ecuaciones, la E_2 y la E_3 son incompatibles pues nos indican que 3 = 4, y por tanto se trata de un sistema incompatible.

De todas maneras vamos a hacerlo mediante rangos y aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius.

Como $m = 1$ tenemos que $|A| = 0$ y por tanto rango(A) < 3. Tomando en A el menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, deducimos que rango (A) = 2 (también se ve claramente que las filas F_2 y F_3 son iguales y por tanto una de ellas la podemos suprimir y el rango(A)=2)

En A*, como menor de orden 3 tenemos $|A| = 0$ y vemos cuánto valen los demás de orden 3 para ver si hay alguno no nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 + 1 - 1 - 3 + 4 = 2 \neq 0 \rightarrow \text{rango(A*)} = 3$$

Tenemos que rango(A) = 2 $\neq$ rango(A*) = 3 → por el teorema de Rouché-Fröbenius, se trata de un sistema incompatible

CASO 3: $m = -1$

Lo primero que hacemos es sustituir el valor en el sistema y en las matrices asociadas

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y - z = 4 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Como podemos observar fácilmente en el sistema de ecuaciones, la E_1 y la E_2 son la misma por tanto podemos reducir el sistema a otro equivalente con sólo dos ecuaciones → $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y - z = 4 \end{cases}$ y estudiar en éste su compatibilidad. Así las matrices que nos quedan son $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, que obviamente tienen rango 2 por tener sólo dos filas y éstas no ser proporcionales (si queréis hacerlo por menores basta tomar el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$)

Así que rango(A) = rango(A*) = 2 < nº de incógnitas = 3 → se trata de un <u>sistema compatible indeterminado</u> por el teorema de Rouché-Fröbenius.

3. <u>RESOLUCIÓN DE SISTEMAS. REGLA DE CRAMER</u>

A. <u>*Método de Gauss*</u>

Este método es una generalización del método de reducción y consiste en hacer operaciones entre las ecuaciones para convertirlo en un sistema triangular que resulta muy fácil de resolver.

Veamos con un ejemplo como funciona:

<u>Ejemplo 4</u>: Resolver el sistema siguiente por el método de Gauss

$\begin{cases} 2x+3y+2z=2 \\ 3x+4y-z=5 \\ x+2y+3z=-1 \end{cases}$ →(permutamos la E_1 con la E_3) $\begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ 3x+4y-z=5 \\ 2x+3y+2z=2 \end{cases}$ →(efectuamos las operaciones $E_2 - 3\cdot E_1$ y $E_3 - 2\cdot E_1$ para hacer ceros en las x) → $\begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ -2y-10z=8 \\ -y-4z=4 \end{cases}$ →(simplificamos la E_2 por (-2)) → $\begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ y+5z=-4 \\ -y-4z=4 \end{cases}$

→ (efectuamos la operación $E_3 + E_2$) → $\begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ y+5z=-4 \\ z=0 \end{cases}$ Con esto tenemos el sistema triangulado y ya sólo resta ir resolviendo de abajo hacia arriba y va saliendo la solución. De la tercera ecuación es evidente que $z=0$

De la segunda sustituyendo el valor obtenido tenemos que $y+5\cdot 0=-4$ → $y=-4$

Por último, sustituimos en la primera ecuación, $x+2\cdot(-4)+3\cdot 0=-1$ → $x=7$

La solución es: $\boxed{x=7 \quad y=-4 \quad z=0}$

B. <u>*Método de la matriz inversa*</u>

Se trata de poner el sistema en forma matricial y cuando tenemos un sistema compatible determinado podemos calcular la inversa de la matriz de coeficientes y con ello despejar las incógnitas directamente.

En el ejemplo anterior teníamos el sistema $\begin{cases} 2x+3y+2z=2 \\ 3x+4y-z=5 \\ x+2y+3z=-1 \end{cases}$, que en forma matricial se escribe A·X = B,

donde $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, calculando la inversa de A, si la tiene, tenemos que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

. Os dejo a vosotros calcular la inversa y hacer el producto y ver que la solución es $\boxed{x=7 \quad y=-4 \quad z=0}$

C. <u>*Regla de Cramer*</u>

Se aplica en sistemas compatibles determinados, aunque también lo usaremos en sistemas compatibles indeterminados.

Como se trata de sistemas compatibles determinados, la matriz de coeficientes es cuadrada y tiene rango máximo, o sea, $|A| \neq 0$. Cada incógnita se obtiene del cociente entre:

- El determinante que resulta de sustituir la columna de la incógnita correspondiente por la columna de los términos independientes.
- El determinante de A

<u>Ejemplo 5</u>: Resolver por Cramer, si es posible el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ x-4y=2 \end{cases}$.

Tenemos que $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$ →rango(A)=2=rango(A*)=nº de incógnitas, se trata de un SCD y lo resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-20+6}{-5} = \frac{14}{5} \quad ; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4-5}{-5} = \frac{1}{5}$$

<u>Ejemplo 6</u>: Resolver por Cramer el sistema $\begin{cases} 2x+3y+2z=2 \\ 3x+4y-z=5 \\ x+2y+3z=-1 \end{cases}$

Calculamos $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 24-3+12-8+4-27 = 2 \neq 0$ Por tanto, por lo de siempre es un SCD. Pasamos a resolver por Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{24+3+20+8+4-45}{2} = 7$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{30-2-6-10-2-18}{2} = -4$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-8+15+12-8-20+9}{2} = 0$$

Que como vemos coinciden con las soluciones obtenidas en el ejemplo 4 de resolución por Gauss

<u>Ejemplo 7</u>: Resolver por Cramer el siguiente sistema: $\begin{cases} x+3y-z=0 \\ 3x+2y+2z=1 \end{cases}$

Es fácil ver que se trata de un SCI (sistema compatible indeterminado) pues rango(A) = rango(A*) = 2 < nº de incógnitas. Basta considerar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$

Lo que hacemos es parametrizar una de las incógnitas, en concreto, aquella o aquellas, que no hemos usado en el menor para calcular el rango. En este caso hacemos $z = \lambda$ y rehacemos el sistema:

$$(*)\begin{cases} x+3y=\lambda \\ 3x+2y=1-2\lambda \end{cases}$$ Ya podemos aplicar Cramer y las soluciones "x" e "y" serán en función del parámetro λ

$$x=\frac{\begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ 1-2\lambda & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{2\lambda-3(1-2\lambda)}{-7}=\frac{-3+8\lambda}{-7} \rightarrow x=\frac{3}{7}-\frac{8}{7}\lambda$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 3 & 1-2\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{1-2\lambda-3\lambda}{-7}=\frac{1-5\lambda}{-7} \rightarrow y=\frac{-1}{7}+\frac{5}{7}\lambda$$

Podemos terminar diciendo que las infinitas soluciones del sistema compatible indeterminado son:

$$\begin{cases} x=\frac{3}{7}-\frac{8}{7}\lambda \\ y=\frac{-1}{7}+\frac{5}{7}\lambda \quad \text{con} \quad \lambda \in R \\ z=\lambda \end{cases}$$

Nota: El sistema (*) lo podéis resolver por otro método, como Gauss por ejemplo.

Ejemplo 8: Resolver el siguiente sistema cuando sea compatible: $\begin{cases} x-my+z=1 \\ x+y+z=m+2 \\ x+y+mz=4 \end{cases}$

Este sistema es el mismo del ejemplo 3, luego teniéndolo en cuenta sabemos que:

a) Si $m \neq \pm 1$, es un SCD y $|A|=m^2-1$

Aplicamos Cramer directamente para calcular las incógnitas:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -m & 1 \\ m+2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & m \end{vmatrix}}{m^2-1}=\frac{m-4m+m+2-4-1+m^2\cdot(m+2)}{m^2-1} \rightarrow x=\frac{m^3+2m^2-2m-3}{m^2-1} \rightarrow x=\frac{(m+1)(m^2+m-3)}{(m-1)(m+1)}$$

$$\rightarrow x=\frac{m^2+m-3}{m-1}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m+2 & 1 \\ 1 & 4 & m \end{vmatrix}}{m^2-1}=\frac{m\cdot(m+2)+1+4-(m+2)-4-m}{m^2-1}=\frac{m^2-1}{m^2-1}=1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & m+2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{m^2-1}=\frac{4-m\cdot(m+2)+1-1-(m+2)+4m}{m^2-1}=\frac{-m^2+m+2}{m^2-1}=\frac{(m+1)\cdot(-m+2)}{(m-1)\cdot(m+1)} \rightarrow z=\frac{-m+2}{m-1}$$

Ojo, este valor o parámetro m no es lo mismo que cuando resolvemos un SCI. Aquí para cada valor de $m \neq \pm 1$, tenemos un SCD que tiene una única solución, y es la que hemos calculado antes. Por ejemplo, si $m=2$, la solución será: $x=3, y=1, z=0$

b) Si $m=-1$, es un SCI y nos quedamos con sólo las 2 ecuaciones que eran linealmente independientes: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y-z=4 \end{cases}$ En este caso no podemos hacer $z=\lambda$ pues nos quedaría el sistema $\begin{cases} x+y=1-\lambda \\ x+y=4+\lambda \end{cases}$ y entonces $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4+\lambda & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\dfrac{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4+\lambda & 1 \end{vmatrix}}{0}$ lo cual es absurdo.

Debemos tomar como parámetro $x=\lambda$ ó $y=\lambda$, para que podamos aplicar Cramer. El sistema nos queda haciendo $x=\lambda \rightarrow \begin{cases} y+z=1-\lambda \\ y-z=4-\lambda \end{cases}$. Resolvemos por Cramer y tenemos: $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4-\lambda & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}=\dfrac{-1+\lambda-4+\lambda}{-2} \rightarrow$

$y=\dfrac{5-2\lambda}{2}$ $\qquad$ $z=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}}{-2}=\dfrac{-3}{2}$

Las soluciones son de la forma: $\begin{cases} x=\lambda \\ y=\dfrac{5}{2}-\lambda \\ z=\dfrac{-3}{2} \end{cases}$ con $\lambda \in R$

<u>2ª forma</u>: Vamos a resolverlo por Gauss $\begin{cases} y+z=1-\lambda \\ y-z=4-\lambda \end{cases} \rightarrow$ (hacemos E_2+E_1) $\rightarrow \begin{cases} y+z=1-\lambda \\ 2y=5-2\lambda \end{cases} \rightarrow$ De la E_2 resultante, tenemos que $y=\dfrac{5-2\lambda}{2}=\dfrac{5}{2}-\lambda$

Sustituimos en la E_1, para calcular “z”: $\dfrac{5}{2}-\lambda+z=1-\lambda \rightarrow z=\dfrac{-3}{2}$ y nos resultan las mismas soluciones: $\begin{cases} x=\lambda \\ y=\dfrac{5}{2}-\lambda \\ z=\dfrac{-3}{2} \end{cases}$ con $\lambda \in R$

4. **SISTEMAS HOMOGÉNEOS**

Los sistemas homogéneos son aquellos en los que todos los términos independientes son nulos. Son de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \dots + a_{1n}\cdot x_n = 0 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \dots + a_{2n}\cdot x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \dots + a_{mn}\cdot x_n = 0 \end{cases}$$

Estos sistemas siempre son compatibles puesto que al menos tienen una solución, llamada solución trivial, y es aquella en la que todas las incógnitas valen 0, es decir, $x_i = 0$ para todo i.

La compatibilidad también es evidente por el teorema de Rouché-Fröbenius pues la matriz ampliada es

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 \end{pmatrix}$$

que como vemos tiene una columna de ceros y su rango será igual al de A obligatoriamente.

En estos casos, el teorema de Rouché-Fröbenius queda reducido a:

- Si rango(A) = nº de incógnitas → se trata de un SCD
- Si rango(A) < nº de incógnitas → se trata de un SCI

Ejemplo 9: Resolver el sistema $\begin{cases} x - 5y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + 5z = 0 \end{cases}$

Tenemos que $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$ → rango(A) = 3 = nº de incógnitas → Por el teorema de Rouché-Fröbenius tenemos que es un SCD (solución única), y como sabemos que al ser homogéneo tiene la solución trivial, entonces ésta ha de ser la única $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$