ÁLGEBRA EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD
ANDALUCÍA – 2001-2002

***Ejercicio 1*.-** (2002)

En el sector de las aceitunas sin hueso, tres empresas A, B y C, se encuentran en competencia. Calcula el precio por unidad dado por cada empresa sabiendo que verifican las siguientes relaciones:

- El precio de la empresa A es 0'6 euros menos que la media de los precios establecidos por B y C.
- El precio dado por B es la media de los precios de A y C.
- El precio de la empresa C es igual a 2 euros mas 2/5 del precio dado por A mas 1/3 del precio dado por B.

***Ejercicio 2*.-** (2002)

Sean:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1-\alpha & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} \alpha-1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Determina α, si es posible, para que los sistemas de ecuaciones (dados en forma matricial)

$$AX = b, \qquad BX = c$$

tengan infinitas soluciones (cada uno de ellos).

***Ejercicio 3*.-** (2002)

Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & t & 0 \\ t & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula los valores de t para los que el determinante de A es positivo y halla el mayor valor que alcanza dicho determinante.

***Ejercicio 4*.-** (2002)

Determina una matriz A simétrica (A coincide con su traspuesta) sabiendo que

$$\det(A) = -7 \quad \text{y} \quad A\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

***Ejercicio 5*.-** (2002)

Considera

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -m \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) ¿Para qué valores de m tiene inversa la matriz A?

(b) Resuelve, para $m = 2$, el sistema de ecuaciones $AX = C$.

Ejercicio 6.- (2002)

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{ll} x - my + z & = 1 \\ x + y + z & = m + 2 \\ x + y + mz & = 4 \end{array}\right\}$$

(a) Clasifícalo según los valores del parámetro m.

(b) Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

Ejercicio 7.- (2002)

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcula la matriz inversa de A.

(b) Calcula A^{127} y A^{128}.

(c) Determina x e y tal que $AB = BA$.

Ejercicio 8.- (2002)

Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Halla los valores de a para los que la matriz $3A$ tiene inversa.

(b) Calcula, si es posible, la inversa de la matriz A^2 para $a = 0$.

Ejercicio 9.- (2002)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{ll} x + 3y + z & = 3 \\ 2x + my + z & = m \\ 3x + 5y + mz & = 5 \end{array}\right\}.$$

(a) Determina, si es posible, un valor de m para que el correspondiente sistema tenga una y sólo una solución.

(b) Determina, si es posible, un valor de m para que el correspondiente sistema tenga al menos dos soluciones.

(c) Determina, si es posible, un valor de m para que el correspondiente sistema no tenga solución.

***Ejercicio 10*.-** (2002)

Determina la matriz X que verifica la ecuación $AX = X - B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

***Ejercicio 11*.-** (2002)

Denotamos por M^t a la matriz traspuesta de una matriz M. Considera

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -2 & 9 & -6 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Calcula $(AB)^t$ y $(BA)^t$.

(b) Determina una matriz X que verifique la relación $\frac{1}{2}X + (AB)^t = C$.

***Ejercicio 12*.-** (2002)

Sin desarrollarlo, calcula el valor del determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} k & x & 1+ax \\ 2k & y & 2+ay \\ 3k & z & 3+az \end{pmatrix}$$

y enuncia las propiedades que hayas usado.

***Ejercicio 13*.-** (2001)

De las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

determina cuáles tienen inversa y en los casos en que exista, calcula el **determinante** de dichas inversas.

***Ejercicio 14*.-** (2001)

Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & a & 2 \\ a & -1 & a-2 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(a) Determina el rango de A en función del parámetro a.

(b) Discute en función de a el sistema, dado en forma matricial, $AX = B$

(c) Resuelve $AX = B$ en los casos en que sea compatible indeterminado.

Ejercicio 15.- (2001)

Sea

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x & 0 \\ \cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} x + \cos x & \operatorname{sen} x - \cos x & 1 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores de x existe la matriz inversa de A? Calcula dicha matriz inversa.

Ejercicio 16.- (2001)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(a) Siendo I la matriz identidad 3×3 y O la matriz nula 3×3, prueba que $A^3 + I = O$.

(b) Calcula A^{10}.

Ejercicio 17.- (2001)

Se sabe que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & -1 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix}$ verifica que $\det(A) = 1$ y sus columnas son vectores perpendiculares dos a dos.

(a) Calcula los valores de a y b.

(b) Comprueba que para dichos valores se verifica que $A^{-1} = A^t$ donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

Ejercicio 18.- (2001)

Considera el sistema

$$\left.\begin{array}{ll} mx + y - z & = 1 \\ x - my + z & = 4 \\ x + y + mz & = m \end{array}\right\}$$

(a) Discútelo según los valores de m.

(b) ¿Cuál es, según los valores de m, la posición relativa de los planos cuyas ecuaciones respectivas son las tres que forman el sistema?

Ejercicio 19.- (2001)

Determina la matriz X tal que $AX - 3B = 0$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 20.- (2001)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Calcula el **determinante** de las matrices: $2A$, A^{31} y $(A^{31})^{-1}$.

(b) Halla la matriz A^{-1}.

Ejercicio 21.- (2001)

Resuelve el sistema de ecuaciones, dado en forma matricial, $AX = -AX + B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 22.- (2001)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$

(a) Determina para qué valores del parámetro λ la matriz A no tiene inversa.

(b) Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $\lambda = -2$.

Ejercicio 23.- (2001)

Determina a, b y c sabiendo que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & b & c \end{pmatrix} \quad \text{verifica:} \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \text{rango}(A) = 2.$$

Ejercicio 24.- (2001)

(a) Clasifica el siguiente sistema según los valores del parámetro m

$$\left.\begin{array}{rl} 2x + my & = 0 \\ x + \quad mz & = m \\ x + y + 3z & = 1 \end{array}\right\}$$

(b) Resuelve el sistema anterior para $m = 6$.