ÁLGEBRA EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD
ANDALUCÍA – 2007-2010

***Ejercicio 1*.-** (2010)

Considera el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & z & = & 5 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & -4 \end{array}\right\}$$

(a) Calcula razonadamente un valor de λ para que el sistema resultante al añadirle la ecuación $x + y + \lambda z = 9$ sea compatible indeterminado.

(b) ¿Existe algún valor de λ para el cual el sistema resultante no tiene solución?

***Ejercicio 2*.-** (2010)

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) Determina los valores de α para los que A tiene inversa.

(b) Calcula la inversa de A para $\alpha = 1$.

(c) Resuelve, para $\alpha = 1$, el sistema de ecuaciones $AX = B$.

***Ejercicio 3*.-** (2010)

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Indica los valores de m para los que A es invertible.

(b) Resuelve la ecuación matricial $XA - B^t = C$ para $m = 0$. (B^t es la matriz traspuesta de B).

***Ejercicio 4*.-** (2010)

Sea el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} \lambda x & + & y & + & z & = & \lambda + 2 \\ 2x & - & \lambda y & + & z & = & 2 \\ x & - & y & + & \lambda z & = & \lambda \end{array}\right\}$$

(a) Discútelo según los valores de λ. ¿Tiene siempre solución?

(b) Resuelve el sistema para $\lambda = -1$.

***Ejercicio 5*.-** (2010)

Considera las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcula A^{-1}.

(b) Resuelve la ecuación matricial $AXA^t - B = 2I$, donde I es la matriz identidad de orden 2 y A^t es la matriz traspuesta de A.

<u>Ejercicio 6</u>.- (2010)

Obtén un vector no nulo $v = (a, b, c)$, de manera que las matrices siguientes tengan simultáneamente rango 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & c \end{pmatrix}$$

<u>Ejercicio 7</u>.- (2010)

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Comprueba que se verifica $2A - A^2 = I$.

(b) Calcula A^{-1}. (Sugerencia: Puedes usar la igualdad del apartado (a)).

<u>Ejercicio 8</u>.- (2010)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} (m+2)x & - & y & - & z & = & 1 \\ -x & - & y & + & z & = & -1 \\ x & + & my & - & z & = & m \end{array}\right\}$$

(a) Discútelo según los valores de m.

(b) Resuélvelo para el caso $m = 1$.

<u>Ejercicio 9</u>.- (2010)

(a) Discute, según los valores del parámetro λ, el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & \lambda y & + & z & = & \lambda \\ \lambda x & + & 2y & + & (\lambda+2)z & = & 4 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 6-\lambda \end{array}\right\}$$

(b) Resuelve el sistema anterior para $\lambda = 0$.

Ejercicio 10.- (2010)

Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\quad \text{y}\quad C=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcula la matriz X que cumpla la ecuación $AXB=C$.

Ejercicio 11.- (2010)

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} \lambda x & + & 2y & + & 6z & = & 0 \\ 2x & + & \lambda y & + & 4z & = & 2 \\ 2x & + & \lambda y & + & 6z & = & \lambda-2 \end{array}\right\}$$

(a) Discútelo según los valores del parámetro λ.

(b) Resuélvelo para $\lambda=2$.

Ejercicio 12.- (2010)

De la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se sabe que $\det(A)=4$. Se pide:

(a) Halla $\det(-3A^t)$ y $\det\begin{pmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{pmatrix}$. Indica las propiedades que utilizas. (A^t es la matriz traspuesta de A).

(b) Calcula $\det(A^{-1}A^t)$.

(c) Si B es una matriz cuadrada tal que $B^3=I$, siendo I la matriz identidad, halla $\det(B)$.

Ejercicio 13.- (2009)

Tratamos de adivinar, mediante ciertas pistas, los precios de tres productos A, B y C.

- Pista 1: Si compramos una unidad de A, dos de B y una de C gastamos 118 euros.
- Pista 2: Si compramos n unidades de A, $n+3$ de B y tres de C gastamos 390 euros.

(a) ¿Hay algún valor de n para el que estas dos pistas sean incompatibles?

(b) Sabiendo que $n=4$ y que el producto C cuesta el triple que el producto A, calcula el precio de cada producto.

Ejercicio 14.- (2009)

(a) Discute según los valores del parámetro λ el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & \lambda y & & & = & 0 \\ x & & & + & \lambda z & = & \lambda \\ x & + & y & + & 3z & = & 1 \end{array}\right\}$$

(b) Resuélvelo para $\lambda=0$.

Ejercicio 15.- (2009)

Sean F_1, F_2, F_3 las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz B de orden 3, cuyo determinante vale -2. Calcula, indicando las propiedades que utilices:

(a) El determinante de B^{-1}.

(b) El determinante de $(B^t)^4$ (B^t es la matriz traspuesta de B).

(c) El determinante de $2B$.

(d) El determinante de una matriz cuadrada cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $5F_1 - F_3$, $3F_3$, F_2.

Ejercicio 16.- (2009)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

(a) Calcula, si existe, la matriz inversa de A.

(b) Calcula las matrices X e Y que satisfacen las ecuaciones matriciales $XA = A + 2B$ y $AY = A + 2B$.

Ejercicio 17.- (2009)

(a) Resuelve el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & z & = & 2 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & 2y & + & 5z & = & 2 \end{array}\right\}$$

(b) Calcula λ sabiendo que el siguiente sistema tiene alguna solución común con el del apartado (a)

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ -x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & \lambda z & = & -3 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 18.- (2009)

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = A - kI$, donde k es una constante e I es la matriz identidad de orden 2.

(a) Determina los valores de k para los que B no tiene inversa.

(b) Calcula B^{-1} para $k = -1$.

(c) Determina las constantes α y β para las que se cumple $A^2 + \alpha A = \beta I$.

Ejercicio 19.- (2009)

Sean A, B, C y X matrices cualesquiera que verifican $AXB = C$.

(a) Si las matrices son cuadradas de orden 3, y se sabe que el determinante de A es 3, el de B es -1 y el de C es 6, calcula el determinante de las matrices X y $2X$.

(b) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ calcula la matriz X.

***Ejercicio 20*.-** (2009)

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Determina la matriz X que verifica $AX - B^t = 2C$ (B^t es la matriz traspuesta de B).

***Ejercicio 21*.-** (2009)

Una empresa envasadora ha comprado un total de 1500 cajas de pescado en tres mercados diferentes, a un precio por caja de 30, 20 y 40 euros respectivamente. El coste total de la operación ha sido de 40500 euros. Calcula cuánto ha pagado la empresa en cada mercado, sabiendo que en el primero de ellos se ha comprado el 30 % de las cajas.

***Ejercicio 22*.-** (2009)

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & \lambda y & + & z & = & 4 \\ x & + & 3y & + & z & = & 5 \\ \lambda x & + & y & + & z & = & 4 \end{array}\right\}$$

(a) Discútelo según los valores del parámetro λ.

(b) Resuélvelo en el caso $\lambda = 1$.

***Ejercicio 23*.-** (2009)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(a) Calcula, si existe, A^{-1}.

(b) Resuelve el sistema $AX = 3X$ e interpreta geométricamente el conjunto de sus soluciones.

***Ejercicio 24*.-** (2009)

Sea el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & m+1 \\ x & + & my & + & z & = & 1 \\ mx & + & y & - & z & = & m \end{array}\right\}$$

(a) Determina los valores de m para los que el sistema es compatible.

(b) Resuelve el sistema en el caso $m = -1$.

***Ejercicio 25*.-** (2008)

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} x + \lambda y - z &= 0 \\ 2x + y + \lambda z &= 0 \\ x + 5y - \lambda z &= \lambda + 1 \end{aligned}\right\}$$

(a) Clasifícalo según los valores del parámetro λ.

(b) Resuélvelo para $\lambda = -1$.

***Ejercicio 26*.-** (2008)

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula la matriz P que verifica $AP - B = C^T$ (C^T es la matriz traspuesta de C).

***Ejercicio 27*.-** (2008)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= a - 1 \\ 2x + y + az &= a \\ x + ay + z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

(a) Discútelo según los valores del parámetro a.

(b) Resuélvelo en el caso $a = 2$.

***Ejercicio 28*.-** (2008)

Sabemos que el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 1 \\ x + 2y - z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

tiene las mismas soluciones que el que resulta al añadirle la ecuación $ax + y + 7z = 7$

(a) Determina el valor de a.

(b) Calcula la solución del sistema inicial de dos ecuaciones, de manera que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a la unidad.

***Ejercicio 29*.-** (2008)

Un cajero automático contiene sólo billetes de 10, 20 y 50 euros. En total hay 130 billetes con un importe de 3000 euros.

(a) ¿Es posible que en el cajero haya el triple número de billetes de 10 que de 50?

(b) Suponiendo que el número de billetes de 10 es el doble que el número de billetes de 50, calcula cuantos billetes hay de cada tipo.

Ejercicio 30.- (2008)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$.

(a) Halla los valores del parámetro m para los que el rango de A es menor que 3.

(b) Estudia si el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tiene solución para cada uno de los valores de m obtenidos en el apartado anterior.

Ejercicio 31.- (2008)

Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rl} x + y & = 1 \\ ky + z & = 0 \\ x + (k+1)y + kz & = k+1 \end{array}\right\}$$

(a) Determina el valor del parámetro k para que sea incompatible.

(b) Halla el valor del parámetro k para que la solución del sistema tenga $z = 2$.

Ejercicio 32.- (2008)

Halla los valores del parámetro m que hacen compatible el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} -x + 2y - 2z & = 2 \\ 2x + y + z & = m \\ x + 3y - z & = m^2 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 33.- (2008)

Sea I la matriz identidad de orden 3 y $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcula, si existe, el valor de k para el cual $(A - kI)^2$ es la matriz nula.

Ejercicio 34.- (2008)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Calcula, si existen, la matriz inversa de A y la de B.

(b) Resuelve la ecuación matricial $AX + B = A + I$, donde I denota la matriz identidad de orden 3.

Ejercicio 35.- (2008)

(a) Determina razonadamente los valores del parámetro m para los que el siguiente sistema de ecuaciones tiene más de una solución:

$$\left.\begin{array}{rl} 2x + y + z & = mx \\ x + 2y + z & = my \\ x + 2y + 4z & = mz \end{array}\right\}$$

(b) Resuelve el sistema anterior para el caso $m = 0$ y para el caso $m = 1$.

Ejercicio 36.- (2008)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}$

(a) Estudia el rango de A en función de los valores del parámetro k.

(b) Para $k = 0$, halla la matriz inversa de A.

Ejercicio 37.- (2007)

Sean I la matriz identidad de orden 2 y $A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Encuentra los valores de m para los cuales se cumple que $(A - I)^2 = O$, donde O es la matriz nula de orden 2.

(b) Para $m = 2$, halla la matriz X tal que $AX - 2A^T = O$, donde A^T denota la matriz traspuesta de A.

Ejercicio 38.- (2007)

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} ax + y + z &= 4 \\ x - ay + z &= 1 \\ x + y + z &= a + 2 \end{aligned}\right\}.$$

(a) Resuélvelo para el valor de a que lo haga compatible indeterminado.

(b) Resuelve el sistema que se obtiene para $a = -2$.

Ejercicio 39.- (2007)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

(a) Determina la matriz $B = A^2 - 2A$.

(b) Determina los valores de λ para los que la matriz B tiene inversa.

(c) Calcula B^{-1} para $\lambda = 1$.

Ejercicio 40.- (2007)

(a) Calcula la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Escribe en forma matricial el siguiente sistema y resuélvelo usando la matriz A^{-1} hallada en el apartado anterior,

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ y + z &= -2 \\ x + z &= 3 \end{aligned}\right\}.$$

<u>Ejercicio 41</u>.- (2007)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Determina los valores de α para los que la matriz A tiene inversa.

(b) Para $\alpha = 1$, calcula A^{-1} y resuelve la ecuación matricial $AX = B$.

<u>Ejercicio 42</u>.- (2007)

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rl} x + y + z & = 0 \\ 2x + \lambda y + z & = 2 \\ x + y + \lambda z & = \lambda - 1 \end{array}\right\}.$$

(a) Determina el valor de λ para que el sistema sea incompatible.

(b) Resuelve el sistema para $\lambda = 1$.

<u>Ejercicio 43</u>.- (2007)

Clasifica y resuelve el siguiente sistema según los valores de a,

$$\left.\begin{array}{rl} x + y + z & = 0 \\ (a+1)y + 2z & = y \\ x - 2y + (2-a)z & = 2z \end{array}\right\}.$$

<u>Ejercicio 44</u>.- (2007)

Se sabe que el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rl} -\lambda x + y + (\lambda+1) z & = \lambda + 2 \\ x + y + z & = 0 \\ (1-\lambda) x - \lambda y & = 0 \end{array}\right\}$$

tiene más de una solución.

(a) Calcula, en dicho caso, el valor de la constante λ.

(b) Halla todas las soluciones del sistema.

<u>Ejercicio 45</u>.- (2007)

(a) Calcula el valor de m para el que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ verifica la relación $2A^2 - A = I$ y determina A^{-1} para dicho valor de m.

(b) Si M es una matriz cuadrada que verifica la relación $2M^2 - M = I$, determina la expresión de M^{-1} en función de M y de I.

***Ejercicio 46*.-** (2007)

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones para los valores de m que lo hacen compatible:

$$\left.\begin{array}{ll} x+my & =m \\ mx+y & =m \\ mx+my & =1 \end{array}\right\}.$$

***Ejercicio 47*.-** (2007)

Sea A la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e I la la matriz identidad de orden 3.

(a) Calcula los valores de λ para los que el determinante de $A-2I$ es cero.

(b) Calcula la matriz inversa de $A-2I$ para $\lambda=-2$.

***Ejercicio 48*.-** (2007)

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{ll} x+y+mz & =1 \\ my-z & =-1 \\ x+2my & =0 \end{array}\right\}.$$

(a) Clasifica el sistema según los valores de m.

(b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.