GEOMETRÍA EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD ANDALUCÍA 2007-2010

Ejercicio 1.- (2010)

Considera los puntos $A(1,0,2)$, $B(-1,2,4)$ y la recta r definida por

$$\frac{x+2}{2} = y-1 = \frac{z-1}{3}$$

(a) Determina la ecuación del plano formado por los puntos que equidistan de A y de B.

(b) Halla la ecuación del plano paralelo a r y que contiene los puntos A y B.

Ejercicio 2.- (2010)

Considera los puntos $A(1,1,1)$, $B(0,-2,2)$, $C(-1,0,2)$ y $D(2,-1,2)$.

(a) Calcula el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.

(b) Determina la ecuación de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano que contiene a los puntos A, B y C.

Ejercicio 3.- (2010)

Considera las rectas r y s de ecuaciones

$$x-1 = y = 1-z \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} x-2y = -1 \\ y+z = 1 \end{cases}$$

(a) Determina su punto de corte.

(b) Halla el ángulo que forman r y s.

(c) Determina la ecuación del plano que contiene a r y s.

Ejercicio 4.- (2010)

Los puntos $P(2,0,0)$ y $Q(-1,12,4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice S pertenece a la recta r de ecuación

$$\begin{cases} 4x+3z = 33 \\ y = 0 \end{cases}$$

(a) Calcula las coordenadas del punto S sabiendo que r es perpendicular a la recta que pasa por P y S.

(b) Comprueba si el triángulo es rectángulo.

Ejercicio 5.- (2010)

Considera los puntos $A(1,2,1)$ y $B(-1,0,3)$.

(a) Calcula las coordenadas de los puntos que dividen el segmento AB en tres partes iguales.

(b) Halla la ecuación del plano perpendicular al segmento AB y que pasa por A.

Ejercicio 6.- (2010)

Considera el plano π definido por $2x - y + nz = 0$ y la recta r dada por

$$\frac{x-1}{m} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$$

con $m \neq 0$.

(a) Calcula m y n para que la recta r sea perpendicular al plano π.

(b) Calcula m y n para que la recta r esté contenida en el plano π.

Ejercicio 7.- (2010)

Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $6x + 3y + 2z = 6$ con los ejes de coordenadas.

Ejercicio 8.- (2010)

Sean los puntos $A(1,1,1)$, $B(-1,2,0)$, $C(2,1,2)$ y $D(t,-2,2)$

(a) Determina el valor de t para que A, B, C y D estén en el mismo plano.

(b) Halla la ecuación de un plano perpendicular al segmento determinado por A y B, que contenga al punto C.

Ejercicio 9.- (2010)

Halla la ecuación del plano que es paralelo a la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x - 2y + 11 = 0 \\ 2y + z - 19 = 0 \end{cases}$ y contiene a la recta s definida por $\begin{cases} x = 1 - 5\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$

Ejercicio 10.- (2010)

Considera los planos π_1, π_2 y π_3 dados respectivamente por las ecuaciones

$$x + y = 1, \quad ay + z = 0 \quad \text{y} \quad x + (1+a)y + az = a + 1$$

(a) ¿Cuánto ha de valer a para que no tengan ningún punto en común?

(b) Para $a = 0$, determina la posición relativa de los planos.

Ejercicio 11.- (2010)

Halla el punto simétrico de $P(1,1,1)$ respecto de la recta r de ecuación

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$$

Ejercicio 12.- (2010)

Sean los puntos $A(2,\lambda,\lambda)$, $B(-\lambda,2,0)$ y $C(0,\lambda,\lambda-1)$.

(a) ¿Existe algún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ para el que los puntos A, B y C estén alineados? Justifica la respuesta.

(b) Para $\lambda = 1$ halla la ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices A, B y C. Calcula la distancia del origen de coordenadas a dicho plano.

***Ejercicio 13*.-** (2009)

Considera el punto $A(1,-2,1)$ y la recta r definida por las ecuaciones $\left\{\begin{array}{lcl} x+y & = & 2 \\ 2x+y+z & = & 7 \end{array}\right.$

(a) Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por A.

(b) Calcula la distancia del punto A a la recta r.

***Ejercicio 14*.-** (2009)

Considera el punto $P(1,0,0)$, la recta r definida por $x-3=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-2}$ y la recta s definida por $(x,y,z)=(1,1,0)+\lambda(-1,2,0)$.

(a) Estudia la posición relativa de r y s.

(b) Halla la ecuación del plano que pasando por P es paralelo a r y s.

***Ejercicio 15*.-** (2009)

Se considera la recta r definida por $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ y & = & 1 \\ z & = & \lambda-2 \end{array}\right.$ y la recta s definida por $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \mu \\ y & = & \mu-1 \\ z & = & -1 \end{array}\right.$ Halla la ecuación de la recta perpendicular común a r y s.

***Ejercicio 16*.-** (2009)

Considera el punto $P(1,0,-2)$, la recta r definida por $\left\{\begin{array}{lcl} x-2y-1 & = & 0 \\ y+z-2 & = & 0 \end{array}\right.$ y el plano π de ecuación $2x+y+3z-1=0$.

(a) Halla la ecuación del plano que pasa por P, es paralelo a r y es perpendicular a π.

(b) Halla la ecuación de la recta que pasa por P, corta a r y es paralela a π.

***Ejercicio 17*.-** (2009)

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1,1,-1)$, es paralela al plano de ecuación $x-y+z=1$ y corta al eje Z.

***Ejercicio 18*.-** (2009)

Sean la recta r definida por $\left\{\begin{array}{lcl} x-y & = & -2 \\ x-z & = & -3 \end{array}\right.$ y la recta s definida por $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ 2y-z & = & -2 \end{array}\right.$

(a) Estudia la posición relativa de r y s.

(b) Halla la ecuación del plano que contiene a s y es paralelo a r.

Ejercicio 19.- (2009)

Considera la recta r definida por

$$\begin{cases} y & = & -1 \\ 2x - z & = & 2 \end{cases}$$

y la recta s definida por

$$\begin{cases} x & = & 4 + 3\lambda \\ y & = & 3 - \lambda \\ z & = & 5 + 4\lambda \end{cases}$$

Halla la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

Ejercicio 20.- (2009)

Considera la recta r definida por

$$\begin{cases} x - y + 3 & = & 0 \\ x + y - z - 1 & = & 0 \end{cases}$$

y la recta s definida por

$$\begin{cases} 2y + 1 & = & 0 \\ x - 2z + 3 & = & 0 \end{cases}$$

(a) Determina la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

(b) ¿Existe algún plano que contenga a r y sea perpendicular a s? Razona la respuesta.

Ejercicio 21.- (2009)

Considera la recta r definida por $\begin{cases} x + y & = & 2 \\ y + z & = & 0 \end{cases}$ y la recta s que pasa por los puntos $A(2, 1, 0)$ y $B(1, 0, -1)$.

(a) Estudia la posición relativa de ambas rectas.

(b) Determina un punto C de la recta r tal que los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ sean perpendiculares.

Ejercicio 22.- (2009)

Considera el plano π de ecuación $3x - 2y - 2z = 7$ y la recta r definida por

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$$

(a) Determina la ecuación del plano paralelo a π que contiene a r.

(b) Halla la ecuación del plano ortogonal a π que contiene a r.

Ejercicio 23.- (2009)

Sea la recta r definida por $\begin{cases} 3x + 2y & = & 0 \\ 3x + z & = & 0 \end{cases}$

(a) Determina la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por el punto $P(1, 1, 1)$.

(b) Halla los puntos de r cuya distancia al origen es de 4 unidades.

Ejercicio 24.- (2009)

Sea el punto $P(2,3-1)$ y la recta r definida por $\left\{\begin{array}{lcl} x+y+2z & = & 1 \\ x-2y-4z & = & 1 \end{array}\right.$

(a) Halla la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r.

(b) Halla el punto de r que está más cerca de P.

Ejercicio 25.- (2008)

Los puntos $A(-2,3,1)$, $B(2,-1,3)$ y $C(0,1,-2)$ son vértices consecutivos del paralelogramo $ABCD$.

(a) Halla las coordenadas del vértice D.

(b) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por B y es paralela a la diagonal AC.

(c) Halla la ecuación del plano que contiene a dicho paralelogramo.

Ejercicio 26.- (2008)

Sea la recta r dada por $\left\{\begin{array}{lcl} 2x+y-mz & = & 2 \\ x-y-z & = & -m \end{array}\right.$

y el plano π definido por $x+my-z=1$

(a) ¿Existe algún valor de m para el que π y r son paralelos?

(b) ¿Para qué valor de m está la recta contenida en el plano?

(c) ¿Cuál es la posición relativa de la recta y el plano cuando $m=0$?

Ejercicio 27.- (2008)

Sea la recta s dada por $\left\{\begin{array}{lcl} x-z & = & -1 \\ 2y+z & = & 3 \end{array}\right.$

(a) Halla la ecuación del plano π_1 que es paralelo a la recta s y que contiene a la recta r, dada por $x-1=-y+2=z-3$

(b) Estudia la posición relativa de la recta s y el plano π_2, de ecuación $x+y=3$, y deduce la distancia entre ambos.

Ejercicio 28.- (2008)

Dados los puntos $A(1,1,0)$, $B(1,1,2)$ y $C(1,-1,1)$.

(a) Comprueba que no están alineados y calcula el área del triángulo que determinan.

(b) Halla la ecuación del plano que contiene al punto A y es perpendicular a la recta determinada por B y C.

Ejercicio 29.- (2008)

Dada la recta r definida por

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{1}$$

(a) Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r.

(b) Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a r.

Ejercicio 30.- (2008)

Dados los puntos $A(2,1,1)$ y $B(0,0,1)$, halla los puntos C en el eje OX tales que el área del triángulo de vértices A, B y C es 2.

Ejercicio 31.- (2008)

Considera la recta r definida por $\left\{\begin{aligned} x &= 0 \\ 3y+z &= 3 \end{aligned}\right.$

y la recta s definida por $\left\{\begin{aligned} 2x-z &= 3 \\ y &= 0 \end{aligned}\right.$

(a) Estudia la posición relativa de r y s.

(b) Halla la ecuación general de un plano que contiene a s y es paralelo a r.

Ejercicio 32.- (2008)

Sea la recta r definida por $\left\{\begin{aligned} x &= 1 \\ x-y &= 0 \end{aligned}\right.$

y sean los planos π_1, de ecuación $x+y+z=0$, y π_2, de ecuación $y+z=0$. Halla la recta contenida en el plano π_1, que es paralela al plano π_2 y que corta a la recta r.

Ejercicio 33.- (2008)

Se sabe que los planos de ecuaciones $x+2y+bz=1$, $2x+y+bz=0$, $3x+3y-2z=1$ se cortan en una recta r.

(a) Calcula el valor de b.

(b) Halla unas ecuaciones paramétricas de r.

Ejercicio 34.- (2008)

Dados los puntos $A(2,1,-1)$ y $B(-2,3,1)$ y la recta r definida por las ecuaciones

$$\left\{\begin{aligned} x-y-z &= -1 \\ 3x-2z &= -5 \end{aligned}\right.$$

halla las coordenadas de un punto de la recta r que equidiste de los puntos A y B.

Ejercicio 35.- (2008)

Se considera la recta r definida por $mx = y = z + 2$, $(m \neq 0)$,

y la recta s definida por $\dfrac{x-4}{4} = y - 1 = \dfrac{z}{2}$

(a) Halla el valor de m para el que r y s son perpendiculares.

(b) Deduce razonadamente si existe algún valor de m para el que r y s son paralelas.

Ejercicio 36.- (2008)

Considera los puntos $A(2,0,1)$, $B(-1,1,2)$, $C(2,2,1)$ y $D(3,1,0)$.

(a) Calcula la ecuación del plano π que contiene a los puntos B, C y D.

(b) Halla el punto simétrico de A respecto del plano π.

Ejercicio 37.- (2007)

(a) Halla los dos puntos que dividen al segmento de extremos $A(1,2,1)$ y $B(-1,0,3)$ en tres partes iguales.

(b) Determina la ecuación del plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por su punto medio.

Ejercicio 38.- (2007)

Considera los vectores $\vec{u} = (1,1,m)$, $\vec{v} = (0,m,-1)$ y $\vec{w} = (1,2m,0)$.

(a) Determina el valor de m para que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes.

(b) Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, expresa el vector $\vec{w}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Ejercicio 39.- (2007)

Considera los planos de ecuaciones $x - y + z = 0$ y $x + y - z = 2$.

(a) Determina la recta que pasa por el punto $A(1,2,3)$ y no corta a ninguno de los planos dados.

(b) Determina los puntos que equidistan de $A(1,2,3)$ y $B(2,1,0)$ y pertenecen a la recta intersección de los planos dados.

Ejercicio 40.- (2007)

Considera los puntos $A(0,3,-1)$ y $B(0,1,5)$.

(a) Calcula los valores de x sabiendo que el triángulo ABC de vértices $A(0,3,-1)$, $B(0,1,5)$ y $C(x,4,3)$ tiene un ángulo recto en C.

(b) Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $(0,1,5)$ y $(3,4,3)$ y es paralelo a la recta definida por las ecuaciones $\left\{ \begin{array}{ll} x - y + z & = 0 \\ 2x + y & = 3 \end{array} \right.$

***Ejercicio 41*.-** (2007)

Sea r la recta definida por $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-k}{4}=\dfrac{z}{5}$ y s la recta definida por $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{3}$.

(a) Halla k sabiendo que las rectas r y s se cortan en un punto.

(b) Determina la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

***Ejercicio 42*.-** (2007)

Halla la ecuación de la recta contenida en el plano de ecuación $x+2y+3z-1=0$ que corta perpenc cularmente a la recta definida por $\begin{cases} x=2z+4 \\ y=2z+3 \end{cases}$ en el punto $(2,1,-1)$.

***Ejercicio 43*.-** (2007)

Considera la recta r definida por $\dfrac{x-1}{\alpha}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-1}{2}$ y el plano π de ecuación $2x-y+\beta z=0$. Determina α y β en cada uno de los siguientes casos:

(a) La recta r es perpendicular al plano π.

(b) La recta r está contenida en el plano π.

***Ejercicio 44*.-** (2007)

Calcula la distancia del punto $P(1,-3,7)$ a su punto simétrico respecto de la recta definida por

$$\left.\begin{aligned} 3x-y-z-2 &= 0 \\ x+y-z+6 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

***Ejercicio 45*.-** (2007)

(a) Encuentra la ecuación de la recta r que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a los planos π_1 de ecuación $x+y+z=3\sqrt{3}$ y π_2 de ecuación $-x+y+z=2$.

(b) Halla la distancia de la recta r al plano π_1.

***Ejercicio 46*.-** (2007)

Considera el punto $P(1,0,-2)$ y la recta r definida por $\begin{cases} 2x-y &= 5 \\ 2x+y-4z &= 7 \end{cases}$

(a) Determina la recta perpendicular a r que pasa por P.

(b) Halla la distancia entre el punto P y su simétrico Q respecto de la recta r.

***Ejercicio 47*.-** (2007)

Considera el plano π de ecuación $2x+2y-z-6=0$ y el punto $P(1,0,-1)$.

(a) Calcula la recta que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π.

(b) Encuentra el punto simétrico de P respecto del plano π.

Ejercicio 48.- (2007)

Considera el plano π de ecuación $2x + 2y - z - 6 = 0$ y la recta r definida por

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}.$$

(a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano π con los ejes de coordenadas.

(b) Calcula, razonadamente, la distancia de la recta r al plano π.